

भाजीचा दर

लेखक : आमोद कारखानीस

शाळेबाबत आठवणी सांगताना पु. ल. देशपांडे यांनी एका ठिकाणी म्हटले आहे, 'शाळेत इतकी वर्षे गणित शिकून काय उपयोग झाला? आमची भाजीवाली सुद्धा दीड पाव भेंडी, अर्धा किलो टोमॅटो; यांचे पैसे किती झाले याचा हिशोब माझ्या कितीतरी आधी करते.' बरोबर आहे, आपले शालेय गणित सूत्रांमध्येच अडकून आहे. यासारख्या व्यवहारातल्या गणिताकडे ते बघतच नाही. आणि, माझ्या मते 'भाजीचे दर' अत्यंत महत्त्वाचे आहेत. भाजीच्या दरांमध्ये खूपसे काही दडलेले आहे. ही संकल्पना एकदा स्पष्ट झाली, की खूपसे गणित व विज्ञान सोपे जाईल. म्हणूनच आज मी आपणाला भाजीच्या दरांची महती सांगणार आहे, व जाता जाता थोडसं विज्ञानही.

भाजीचा दर म्हणजे काय, हे आपल्या सर्वांनाच माहित असते. मेथीची भाजी १० रुपये पेंडी - म्हणजेच एका पेंडीला १० रुपये द्यावे लागतात. कांदे ४० रुपये किलो, म्हणजे एक किलो कांदे हवे असल्यास ४० रुपये द्या. पण मग चार किलो कांदे हवे असतील तर? त्यात काय, ४०ला ४ ने गुणा. $४० \times ४ = १६०$ रुपये होतील. या शिवाय कधीकधी आपण असंही करतो - '४० रुपये दर आहे का, ठीक तर मग मला साठ रुपयांचे कांदे द्या'. मग ६० ला ४० ने भागायचे;

म्हणजे साठ रुपयात दीड किलो कांदे येतील. हे सारं एकदम सोपं आहे, तुम्ही सर्वजण व्यवहारात नेहमी वापरता, हेच आता मी जरा गणिताच्या फॉर्मल भाषेत मांडतो.

द्यावयाला लागणारे पैसे किंवा किंमत = (भाजीचा) दर × घ्यावयाची quantity (प्रमाण/संख्या/माप).

जर $P = \text{price}$ किंवा किंमत रुपयात

$R = \text{rate}$ दर - रुपये प्रति किलो आणि

$Q = \text{quantity}$ किती वस्तू घ्यायची आहे - किलोमध्ये

तर $P = R \times Q$

आता ४ किलो कांद्यांसाठी किती पैसे द्यावे लागणार हे काढण्यासाठी,

$R = \text{कांद्याचा दर किलोचा दर (वर म्हंटल्याप्रमाणे) रु ४०/किलो}$

म्हणजेच $P = ४० \times ४$ $Q = ४$ किलो, $R = ४०$ रु/किलो

$= १६०$ रुपये.

आणि ६० रुपयात किती किलो कांदे येतील हे पाहण्यासाठी

$P = R \times Q$ दोन्ही बाजूंना R ने भागून

$$\frac{P}{R} = \frac{R}{R} \times Q \Rightarrow \frac{P}{R} = Q$$

इथे P = ६० रुपये, R = ४० रुपये प्रति किलो

$$\text{म्हणजेच } \frac{६० \text{ रुपये}}{४० \text{ रुपये/किलो}} = \frac{६०}{४०} \frac{\text{रुपये}}{\text{रुपये/किलो}} = \frac{६०}{४०} \text{ किलो} = १.५ \text{ किलो}$$

आपल्याला एखादी गोष्ट खरेदी करायला किती पैसे पडले, हे माहीत असेल व किती quantity खरेदी केली हेही माहीत असेल, तर ती वस्तू काय दराने पडली, हे सहजपणे काढता येईल. म्हणजेच १६० रुपयात चार किलो कांदे मिळाले म्हणून कांद्याचा दर =

$$१६० \text{ रुपये / चार किलो} = १६० \div ४ = ४० \text{ रुपये प्रति किलो.}$$

$$\text{सूत्राच्या भाषेत } P=R \times Q \Rightarrow P/Q = १६०/४ = ४० = R \text{ रुपये प्रति किलो.}$$

तुम्ही एव्हाना विचार करीत असाल; भाजीचे दर यासारखी सोपी गोष्ट उगाचच सूत्रात



वगैरे घालून अवघड होत आहे. हो, पण एकदा हे सूत्र लक्षात आले, की हीच संकल्पना आपण इतरत्रही वापरू शकू.

असो, या भाजीच्या दरांबाबत एक

गोष्ट आपल्याला लक्षात आली का? भाजीचा दर मेथीसाठी प्रत्येक पेंडी मागे किंवा जुडी मागे, तर कांद्यासाठी प्रति किलो, केळी प्रति डझन, तर पेरू प्रति नग, असा असतो. म्हणजेच लक्षात घ्या P चे मानक (unit) हे रुपये आहे. R चे मानक रुपये प्रति किलो, प्रति डझन, प्रति नग वगैरे असते. व त्याप्रमाणे आपण घेतलेली गोष्ट (Q) किलो मध्ये, डझनात, नगांमधे असते. दर

सांगताना तो रूपये प्रति 'आपण ती वस्तू ज्याच्यात मोजतो ते युनिट' घेतले जाते. कांदे किलोमध्ये विकतात म्हणून कांद्याचा दर रूपये प्रति किलो आहे किंवा दर किलोस अमुक अमुक रूपये असा आहे. पेरू नगांवर असतील तर त्याचा दर रूपये प्रति नग. याप्रमाणे, भाजीच काय इतर गोष्टींचा दरही असाच सांगतात. आपण कापड मीटरमध्ये मोजतो म्हणून कापडाचा दर एका मीटरला एवढे रूपये किंवा रूपये प्रति मीटर असा सांगू.

भाजीच्या दरासारखे विज्ञानात एखादे उदाहरण सापडले काय? विचार करा. मी इथे एक उदाहरण सांगतो, आणखी उदाहरणे तुम्ही शोधा.

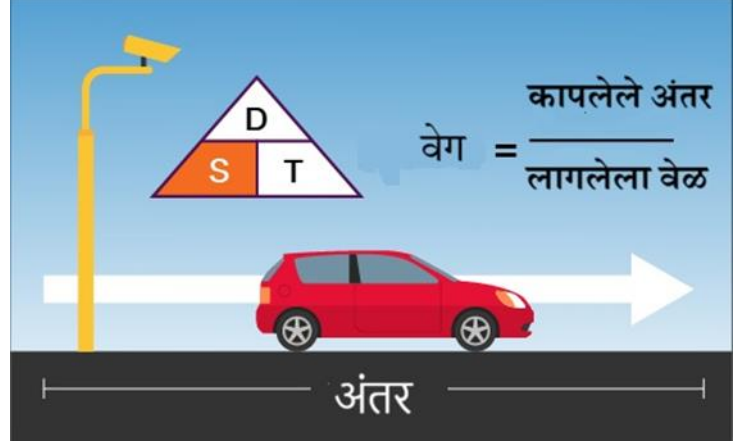
समजा मी एका ठिकाणाहून दुसऱ्या ठिकाणी चालत जात आहे. मग माझ्या चालण्याचा दर काय?

हा प्रश्न थोडा विचित्र वाटतो नाही?

माझ्या चालण्याचा दर म्हणजे मी दर मिनिटाला किती अंतर चाललो. पण आपण बोलचालीच्या भाषेत याला चालण्याचा दर म्हणत नाही, आपण त्याला वेगळा शब्द वापरतो,

स्पीड; मराठीत आपण वेग, गती, चाल असे शब्द वापरतो. मी पाच किलोमीटर अंतर दहा मिनिटात कापले. म्हणजे माझा प्रवासा दरम्यानचा (साध्या भाषेत) वेग दहा मिनिटांत पाच किलोमीटर म्हणून दर मिनिटाला ०.५ किलोमीटर किंवा ०.५ किलोमीटर प्रति मिनिट असा होईल. अनेकदा आपण प्रवासात म्हणतो, गाडी ताशी ६० कि.मी. नी चालली होती. म्हणजे हा देखील प्रवासाचा एक प्रकारचा 'दर' नाही का!

मी १० मिनिटात ५ कि.मी. गेलो; या वाक्यामध्ये मी कुठून कुठे गेलो याबाबत, दिशेबाबत काहीच बोलत नाही. आपण फक्त कापलेले एकूण अंतर व लागलेला वेळ एवढेच बघतो आहोत. म्हणून इथे विज्ञानाच्या दृष्टीने योग्य शब्द 'चाल', स्पीड.



चाल = अंतर कापण्याचा दर = कापलेले अंतर / लागलेला वेळ

चाल = स्पीड = d/t जिथे d = कापलेले अंतर, t = लागलेला एकूण वेळ.

हे सूत्र भाजीच्या दरासारखेच आहे. त्यामुळे आधी बघितल्याप्रमाणे यातील कोणत्याही दोन गोष्टी माहीत असतील तर तिसरी शोधता येईल.

या 'दर पुराणा' बाबत अजून एक गोष्ट लक्षात घेऊया. आपण कांद्याचा दर प्रतिकिलो ठरवला की ते फिक्स असतो मग तुम्ही एक किलो घ्या, की १० किलो. [अर्थात इथे आपण असे समजू या की दुकानात 'फिक्स रेट' अशी पाटी आहे. आणि गिऱ्हाईक 'एक किलोला ४० रुपये, एकदम दहा किलो घेतो, कितीनी देणार?' अशी घासाघीस करत नाही] घेण्याच्या वस्तूची क्वान्टिटी वाढली तर किंमत वाढणार पण दर म्हणजे P/Q तेवढाच राहणार. हेच गणिताच्या भाषेत म्हणायचे, तर द्यावी लागणारी किंमत व घेतलेली क्वान्टिटी यांचा भागाकार किंवा गुणोत्तर सारखाच असतो. ज्याला आपण 'दर' म्हणत आहोत, विज्ञानात यालाच आपण 'कॉन्स्टंट ऑफ

प्रपोर्शनालिटी' म्हणतो. जरा आठवा पाहू आठवी-नववी पर्यंतच्या विज्ञानात असे कॉन्स्टंट आपण कुठे कुठे वापरले आहेत ते? मी इथे एक उदाहरण देत आहे, इतरांचा तुम्ही विचार करा-

आपल्या नेहमीच्या वापरातलेचे उदाहरण आहे - घनत्व

आपण म्हणतो पोहे हलके असतात, लोखंड जड असते. म्हणजे आपण नेमकं काय म्हणत असतो ? एक किलो पोहे व एक किलो लोखंड दोन्हीचे वजन सारखेच असेल की! मग लोखंड जड कसे ? इथे तुम्ही पटकन म्हणाल पण दोन्हीच्या आकारमानात फरक नाही का! एक किलो पोह्यांचा आकार केवढा आणि त्या मानाने एक किलो लोखंड किती कमी. म्हणजे जेव्हा आपण लोखंड आणि पोहे यांची तुलना करत असतो तेव्हा जरी आपण वजन म्हणत असलो तरी आपल्याला अभिप्रेत असते की समान आकाराच्या या दोन्ही वस्तू घेतल्या असता लोखंडाचे वजन जास्त असेल. म्हणजे इथे आपण म्हणत आहोत प्रति युनिट व्हॉल्युम (per unit volume) लोखंडाचे वजन. विज्ञानात याला आपण वेगळा शब्द वापरतो - घनत्व. एखाद्या गोष्टीचे वजन म्हणजे त्याचे पर युनिट व्हॉल्युम (वजन). खरं म्हणजे वजन म्हणायच्या इथे मी वस्तुमान शब्द वापरायला हवा. पण मला असे वाटते, की मुलांना संकल्पना समजवायची असेल, तर प्रथम त्यांना समजेल अशा भाषेतच सांगायला हवे. पुढील एक्झॅक्टनेस नंतर आणता येईल.

समजा आपण आकारमान cm^3 (घन सेंटीमीटर) मध्ये मोजत असू, तर एखाद्या पदार्थाचे घनत्व म्हणजेच त्या पदार्थाचे दर घन सेंटीमीटरला असणारे वजन (वस्तुमान). भाजीच्या

दरासारखेच आहे का हे ? बघा हं - किंमतीच्या ऐवजी वजन, दर किलो साठी (अमूक रुपये) म्हणायच्या ऐवजी दर cm³ (ला अमूक किलोग्राम) आणि R = rate - दर - याला आपण म्हणत आहोत घनत्व.

भाजीच्या दराचे सूत्र $P=R \times Q$ होते.

घनत्व साठी. $M = D \times V$

$M = \text{mass} = \text{वस्तुमान}$

$V = \text{volume} = \text{आकारमान}$

$D = \text{density} = \text{घनत्व}$

नेहमी घनत्वचे सूत्र आपण थोडे वेगळं लिहितो $D = M/V$

भाजीच्या दराप्रमाणे Density/ घनत्व (दर युनिट व्हॉल्युमचे वजन) हा त्या वस्तूचा गुणधर्म असतो व त्या वस्तूसाठी स्थिर (कॉन्स्टंट) असतो. Fixed rate पाटी दुकानाप्रमाणे!

भाजीचा, कापडाचा दर तसे सरळ सोपे असतात. पण कधीकधी काही गोष्टीच्या दरांमध्ये आणखीही काही गुंतागुंत असू शकते. उदाहरणार्थ आपल्या वाढीचा दर किंवा आपण रोपट्यांचा वाढीचा दर काढण्याचा प्रयत्न करूयात. एक रोपटे वर्षाच्या सुरुवातीला दोन फूट उंच होते, ते वर्षभरात वाढून तीन फूट उंच झाले. यात काय, वाढीचा दर काढणे सोपे आहे, तुम्ही म्हणाल! हो पण जरा दमानं! दुसरे एक रोपटे थोडे मोठे होते. त्याची वर्षाच्या सुरुवातीची उंची पाच फूट

होती ती दोन वर्षांच्या नंतर सात फूट झाली. आता आपल्याला या दोन्ही रोपट्यांच्या वाढीचा दर काढावयचा आहे.

दोन्ही रोपटी वर्षभरात एक फुटाने वाढली. पण आपण असे म्हणणार नाही की दोन्हींच्या वाढीचा दर सारखाच होता. पहिले रोपटे दुसऱ्यापेक्षा नक्की जास्त जोमाने वाढले आहे. म्हणजे केवळ विशिष्ट (युनिट) कालावधी (येथे एक वर्ष किंवा दरवर्षाला) मध्ये किती वाढ झाली (वाढ/कालावधी), यावर वाढीचा दर ठरवणे चुकीचे ठरेल. आपल्याला मूळ उंची किती होती, त्याच्या मानाने किती वाढ झाली, हे पहावे लागेल. म्हणून दोन रोपट्यांच्या वाढीच्या दराची तुलना करायची असेल तर दर वर्षात (किंवा एका वर्षात) मूळ उंचीच्या दर फुटामागे किती वाढ झाली, हे पहावे लागेल.

पहिल्या रोपट्याची एका वर्षात प्रति फूट वाढ

= एका वर्षातील वाढ/ मूळ उंची

= (३ फूट - २ फूट) / २ फूट = १/२ फूट / प्रति फूट एका वर्षात

दुसऱ्या रोपट्यासाठी

दोन वर्षांनंतरची उंची ७ फूट - मूळ उंची ५ फूट

दोन वर्षांतील वाढ २ फूट. आपण असे समजू या, की ही वाढ युनिफॉर्म (एकसारखी) आहे.

म्हणून दोन वर्षात २ फूट वाढ - म्हणजे दरवर्षी १ फूट वाढ.

आता या रोपट्यांच्या वाढीचा दर = वर्षातील वाढ / मूळ उंची

= १फूट / ५फूट = १/५ फूट/ फूट प्रति वर्षी

विज्ञानात आपल्याला अशा प्रकारे अनेक गोष्टींची वाढ मोजावी लागते. एक नेहमीचे उदाहरण आहे, तापमानामुळे होणारे प्रसरण. इथे उदाहरणासाठी आपण फक्त रेषीय प्रसरणाची चर्चा करणार आहोत. अर्थात हे इतर प्रकारच्या प्रसरणासाठीही लागू आहेच.

समजा L मीटर लांबीचा एक रॉड आपण तापवला तर त्याची लांबी L1 मीटर होते. म्हणजेच एकूण वाढ झाली L1-L मीटर. पण थांबा थांबा. तुम्ही नुसताच रॉड तापवला असे म्हणू शकत नाही. किती डिग्रीने तापवले हेही सांगायला हवे. आपण असे म्हणूया, की रॉडचे तापमान Δt° C (डिग्री सेल्शियस)ने वाढवले.

एखादा पदार्थ तापवला तर तो किती प्रसरण पावणार, हे त्या वस्तूच्या गुणधर्मावर अवलंबून असते. लाकूड कमी प्रसरण पावेल, लोखंड खूपच जास्त, इतर धातूही कमी-जास्त प्रसरण पावतात. प्रत्येक वस्तूचा प्रसरणाचा दर वेगवेगळा असतो. आणि असे म्हणायला हरकत नाही की सामान्य तापमानासाठी हा दर स्थिर असतो. आता एखाद्या विशिष्ट वस्तूचा तापमानाच्या वाढीचा दर काढायचा कसा? हा दर मागच्या रोपट्यांच्या वाढीच्या दरासारखाच असणार. तो दर आपण दर फुटाला एक वर्षाला अमुक-अमुक फूट वाढ असा काढला. इथेही तसेच - दर मीटरला दर $^{\circ}$ C तापमान वाढीला अमुक-अमुक मीटर वाढ असा असणार आहे. या वाढीच्या दराला विज्ञानात केवळ दर असं म्हणत नाहीत, त्याला चांगलं भारदस्त नाव आहे;

‘रेषीय प्रसरणांक’ (coefficient of linear expansion) व त्यासाठी सर्वसाधारणपणे α हे चिन्ह वापरतात. या α चे युनिट (मानक) काय? आपण वर पाहिले त्याप्रमाणे दर मीटरला दर डिग्री सेल्शियस वाढीला अमुक मीटर असे म्हणत नाहीत - मीटर/ मीटर/ $^{\circ}\text{C}$ यामध्ये मीटर, मीटर कॅन्सल होईल. म्हणून रेषीय प्रसरणांक दर $^{\circ}\text{C}$ तापमान वाढीसाठी (per $^{\circ}\text{C}$ rise in temperature) असा सांगतात.

उदाहरणार्थ ब्रासचा रेषीय प्रसरणांक 10×10^{-6} per degree centigrade असा आहे. याचा अर्थ एक मीटर लांबीचा ब्रासचा रॉड 1°C ने तापवला, तर तो $1 \times 10 \times 10^{-6}$ मीटर = $10^{-4} = 0.00001$ मीटर एवढा प्रसरण पावेल.

जर तो 15°C ने तापवला, तर तो $15 \times 10 \times 10^{-6}$ मीटर = 0.00015 मीटर एवढा प्रसरण पावेल.

लक्षात घ्या, जर आपण मूळ रॉड 1 मीटर ऐवजी 1 किलोमीटर घेतला व 1°C ने तापवला तर तो $1 \times 10 \times 10^{-6}$ किलोमीटर = 0.00001 किलोमीटर एवढा प्रसरण पावेल. आपण मूळ रॉडची लांबी ज्या युनिटमध्ये घेऊ त्याच युनिटमध्ये किती प्रसरण पावेल याचे उत्तर येईल.

आता α माहित असेल तर L मीटर लांबीचा रॉड $\Delta t^{\circ}\text{C}$ ने तापवला तर काय होईल?

α हा प्रसरणांक दर $^{\circ}\text{C}$ साठी आहे म्हणून $\Delta t^{\circ}\text{C}$ ने तापवल्यावर दर unit length साठी ही वाढ $\alpha \times \Delta t$ units अशी होईल.



स्कॉटलंडमधील फोर्थ नदीच्या खाडीवर १८९०मध्ये बांधलेला 'फोर्थ ब्रिज' हा युनेस्कोने जाहीर केलेला जागतिक वारसा म्हणून ओळखला जातो. हा पूल जगामध्ये कॅन्टिलिव्हर डिझाइनचा सर्वात प्रसिद्ध नमुना म्हणून आहे. हा पूल बांधताना स्टीलचा रेषीय प्रसरणांक विचारात घेतलेला आहे.

फोर्थ रेल्वे पुलाची एकूण लांबी २,५२९ मीटर आहे. तो स्टीलचा बनलेला आहे (रेषीय प्रसरणांक = 0.000012 प्रति $^{\circ}C$). जर सर्वात थंड आणि सर्वात उष्ण दिवसांमधील तापमानातील सर्वात मोठा फरक $35^{\circ}C$ असेल, तर पुलाच्या लांबीमध्ये $2,529 \times 0.000012 \times 35 = 1.06$ मीटर इतका बदल होऊ शकतो. पूल बांधताना त्याच्या रचनेमध्ये 1.2 मीटरच्या प्रसरणासाठी तरतूद केलेली आहे.

वस्तूच्या लांबीतील वाढ तीन गोष्टींवर अवलंबून असते. पहिले, अपेक्षेप्रमाणे, ती वस्तूच्या मूळ लांबीच्या प्रमाणात (समानुपाती, *proportional to*) असते. दुसरे, लांबीतील वाढ ही वस्तूच्या तापमानात होणाऱ्या वाढीच्या समानुपाती असते. तिसरे, लांबीतील वाढ ही वस्तू ज्या पदार्थापासून बनलेली आहे, त्यावर अवलंबून असते.

स्रोत : https://www.daviddarling.info/encyclopedia/L/linear_expansion.html

आपला रॉड L मीटर लांबीचा आहे म्हणून हा रॉड $L \times \alpha \times \Delta t$ मीटर एवढा वाढेल.

म्हणजे आता त्याची लांबी,

$$L1 = \text{मूळ लांबी } (L) + \text{प्रसरणाने झालेली वाढ } (L \times \alpha \times \Delta t) \text{ मीटर}$$

$$L1 = L + L \times \alpha \times \Delta t$$

$$\Rightarrow L1 = L (1 + \alpha \times \Delta t) \text{ मीटर}$$

आपल्या पुस्तकात रेषीय प्रसरण काढण्यासाठी हे सूत्र म्हणून दिलेले आहे. बहुतेक वेळा आपण मुलांना केवळ ते पाठ करायला लावतो व त्यावरून गणिते सोडवतो. मग हे अवघड वाटते. हे सूत्र कसे आले याची संकल्पना स्पष्ट झाली, तर समजायला व लक्षात ठेवायला सोपे जाईल.

मित्रांनो, भाजीच्या दरापासून सुरुवात करून आपण बरेच दूर वर आलो आहोत परंतु या सर्वामागे गणिताचे एक तत्त्व आहे.. आपण शिकवताना प्रत्येक टॉपिक, प्रत्येक सूत्र वेगळे नवीनच काहीतरी असल्यासारखे नाही शिकवले व त्यामागील आंतरसंबंध व गणितीय संकल्पना अशा सोप्या पद्धतीने सांगितल्या, तर विषय मूळापासून समजायला मदत होईल.

§§§

लेखक : आमोद कारखानीस, काँप्युटर इंजिनियर, लेखन व चित्रकलेची आवड.

(कळीचे शब्द :- गणिती सूत्रे, भाजीचा दर, वेग, गती, घनत्व, वस्तुमान, रेषीय प्रसरणांक, formulae in Mathematics, rates of vegetables, speed, density, mass, coefficient of linear expansion)