अवगामी तर्कप्रणालीचा दीपस्तंभ
युक्लिडचे एलिमेंट्स

लेखक : किरण बर्वे

शास्त्रांची भाषा म्हणून गणित अत्यंत उपयुक्त आहे. गणित हे तर्कशुद्ध आहे. हे आपण सर्व जाणतोच. मात्र मानवी संस्कृतीच्या सुरुवातीला 'आजूबाजूच्या गोष्टींचे आकलन' याच प्रकारचे गणित होते. थोडेसे वर्गीकरण, अंकांची कल्पना, आकृतीच्या साहाय्याने वस्तूंची कल्पना करणे व त्या बनवणे या पद्धतीचे गणित माहीत होते. गणित ही उपयोजित अभ्यास शाखा होती. मात्र गणित तर्कशुद्ध पायावर उभे करणे आणि त्याच्या विस्ताराला अवकाश खुला करणे हे युक्लिडच्या 'एलिमेंटस' ग्रंथामुळे झाले. या लेखात या ग्रंथाविषयी आपण समजून घेणार आहोत. हा ग्रंथ मानवी संस्कृतीला अत्यंत उपकारक दिशा देणारा आहे. आपण थोडा इतिहास बघू, त्या वेळची परिस्थिती समजून घेऊ आणि मग प्रत्यक्ष एलिमेंटसची माहिती घेऊ.

युक्लिड

स्रोत : विकिपीडिया

इसवी सन पूर्व पाचशेच्या सुमारास ग्रीस आणि एजियन समुद्रकिनाऱ्यावर (Aegean Sea - युरोप आणि आशिया यांच्यामधला भूमध्यसमुद्राचा खाडीसारखा चिंचोळा भाग)

ग्रीक संस्कृती उदयाला आली. तिचा प्रभाव पाश्चात्य विज्ञान आणि विचारांवर कायमस्वरूपी राहिला. अतिशय भरभराटीला आलेल्या व्यापारासोबत विविध प्रकारच्या विचारांचे आदानप्रदान त्या समाजात होत असे. त्यामुळे विविध माहिती आणि ज्ञान एकत्र व्हायला मदत होई. तत्कालीन पाश्चात्य जगामध्ये ग्रीस सुसंस्कृत आणि समृद्ध होता. साधारण इसवी सन पूर्व ४०० मध्ये ग्रीक संस्कृतीचा परमोत्कर्ष झाला. कवी होमर, इतिहासतज्ज्ञ हिरोडोटस, सोफोक्लीस, युरीपीडीस इ. नाटककार, राजकारणी पेरिकल्स आणि तत्त्वज्ञानी सॉक्रेटिस यांचा हा काळ. हे सर्वच तत्कालीन आधुनिक जगाचे सन्माननीय नागरिक! या सर्वांचा प्रभाव आज अजूनही २००० वर्षे होऊन गेली तरी जाणवत आहे!!

ह्या काळामध्ये 'सात शहाणी माणसे' असा किताब काही तत्त्वज्ञ, शास्त्रज्ञ यांना मिळाला. त्यातलाच थेल्स हा एक गणितज्ञ. थेल्स हा सैद्धांतिक विचारसरणीचा पाश्चात्य जगातला पितामह समजला पाहिजे. भूमितीमध्ये विधाने सिद्ध करायला हवीत, हा विचार सर्वप्रथम त्याने मांडला. आपल्याला दिसतंय, वाटतंय तेच बरोबर आहे, असं समजायला त्याने आक्षेप घेतला. ही फार महत्त्वाची गोष्ट होती. ग्रीक हे भूमितीमध्ये पारंगत होते आणि भूमितीचे महत्त्व त्यांच्या लेखी विशेष होते. थेल्सने सुद्धा भूमितीचा सखोल

ग्रीसमधील सात शहाणी माणसं

स्रोत :

https://en.wikipedia.org/wiki/Seven_Sages_of_Greece#/media/File:Nuremberg_chronicles_f_60v_1.png

अभ्यास केला. भूमितीतील काही विधाने सिद्ध केली. त्याने सिद्ध केलेली काही विधाने क्रमशः ,

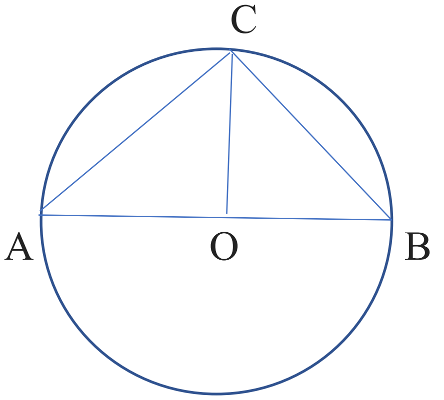
१. विरुद्ध कोन हे समान असतात.

२. त्रिकोणातील तीन कोनांची बेरीज १८० असते.

३. समद्विभुज त्रिकोणामध्ये पायालगतचे कोन सारखे असतात.

या विधानांचा क्रम महत्त्वाचा आहे कारण दुसरी सिद्धता करताना पहिलीचा वापर केला आहे. याप्रमाणे कोणतेही विधान त्या अगोदर सिद्ध झालेल्या विधानांच्या साहाय्याने सिद्ध केले आहे. थेल्सचे सर्वात महत्त्वाचे प्रमेय म्हणजे 'अर्धवर्तुळात आंतरलिखित केलेला कोन ९० अंशाचा असतो'. भूमितीमध्ये, inscribed कोन किंवा आंतरलिखित / अंकित कोन म्हणजे जेव्हा दोन जीवा वर्तुळावर छेदतात, तेव्हा वर्तुळाच्या आतील भागात तयार होणारा कोन. त्याने अगोदर सिद्ध झालेल्या विधानांचा उपयोग कसा केला, हे स्पष्ट व्हावे यासाठी या विधानाची सिद्धता दिली आहे.

खाली दिलेल्या आकृतीत O केंद्र असलेले वर्तुळ आणि त्याचा AB हा व्यास काढला आहे.



आपल्याला कोन ACB हा ९० अंशाचा आहे हे दाखवायचे आहे. AO, OC, OB या त्रिज्या आहेत म्हणून त्या समान आहेत. त्रिकोण AOC व त्रिकोण COB हे समद्विभुज त्रिकोण आहेत.

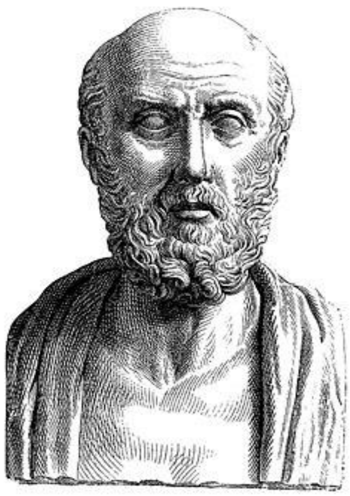
अगोदर सिद्ध केलेल्या विधानानुसार,

आपल्याला कोन ACB हा ९० अंशाचा आहे हे दाखवायचे आहे. AO, OC, OB या त्रिज्या आहेत म्हणून त्या समान आहेत. त्रिकोण AOC व त्रिकोण COB हे समद्विभुज त्रिकोण आहेत. अगोदर सिद्ध केलेल्या विधानानुसार,

कोन OAC = कोन OCA = x , कोन OBC = कोन OCB = y,
त्रिकोण ACB च्या कोनांची बेरीज = x +x + y +y = 2x + 2y = 2(x+y) =180.
त्रिकोणाच्या कोनांची बेरीज १८० म्हणून कोन ACB = x + y = ९०.

ही सिद्धता शाळेत जशी दिली जाते, तशीच आहे; २४०० वर्षांपूर्वीची सिद्धता आपण ८ वी, ९वीत शिकतो!!

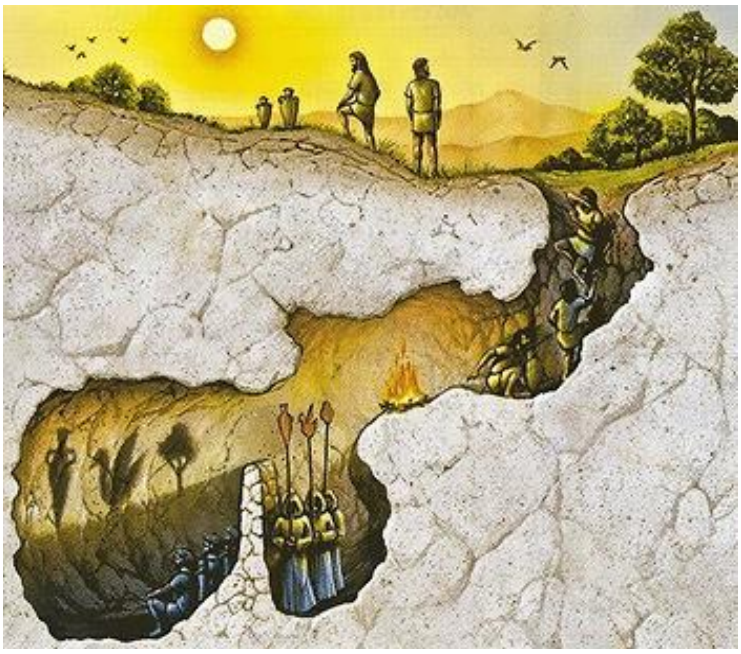
याच काळातील अजून एका गणितीचे नाव पायथागोरस. थेल्स आणि पायथागोरस हे प्रसिद्ध असले, जणू दंतकथा बनून गेलेले असले, तरी त्यांच्याबद्दल निश्चित अशी माहिती नाही. प्रोक्लस (Proclus - इसवी सन ४००) ने लिहिलेल्या ग्रंथाच्या आधारेच थेल्स, पायथागोरस यांच्याविषयी माहिती समजते. मात्र यानंतर आपण विचार करणार आहोत ती व्यक्ती- हिपोक्रॅटस, इसवी सन पूर्व ४०० च्या आसपासच्या कालखंडात होऊन गेली. त्याने भूमितीमध्ये सर्वात पहिल्यांदा गृहीतके, नियम, निष्कर्ष किंवा प्रमेय यासदृश रचना करून ग्रंथ लिहिला. तो ग्रंथ म्हणजे पहिले एलिमेंट्स. हा ग्रंथ जरी नंतर आलेल्या युक्लिडच्या एलिमेंट्सने झाकोळून गेला, तरीही अशा प्रकारचे



हिपोक्रॅटस
स्रोत : विकिपीडिया

लिखाण व विचारसरणी मांडणारा हिपोक्रॅटस अत्यंत मोठा गणितीच ठरतो. आपण नंतर बघणारच आहोत की युक्लिडचा एलिमेंटस हा ग्रंथ संकलनाच्या स्वरूपामधला आहे आणि त्यात थेल्स आणि हिपोक्रॅटस या दोघांच्याही गणिताचा समावेश आहे.

आता जरा त्या काळातल्या विद्वान आणि विचारवंत तत्त्वज्ञ यांचा कळीचा प्रश्न, त्यांची बौद्धिक धडपड काय होती, त्याचा विचार करू. प्लेटोने त्रिस्तरीय सत्याची मांडणी केली आणि बाह्य गोष्टींचे ज्ञान, बाह्य गोष्टी सतत बदलत्या असल्यामुळे काही पूर्ण सत्य नव्हे हे त्याने स्पष्ट केले. तसेच विविध वस्तू आणि व्यक्तींचे संबंध हे देखील नक्की ठरवता येत नाहीत, त्यामुळे तेही पूर्ण सत्य नव्हे. मग मनुष्य अंतः स्फूर्तीने आणि त्याच्या बुद्धीने आकलन करतो ते सत्य असू शकते. अत्यंत शास्त्रशुद्धरित्या तार्किक पद्धतीने विश्लेषण केले, तर जे निपजेल ते सत्य ! अशी काहीशी मांडणी आहे.



प्लेटोची थेअरी ऑफ फॉर्म्स दर्शवणारे गुहेचे रूपकचित्र

स्रोत: https://philosophymt.com/platos-theory-of-forms/

‘Plato's Theory of Forms, also known as the Theory of Ideas, posits that true reality exists in a realm of abstract, eternal, and unchanging Forms, not in the physical world we perceive. This physical world is merely a

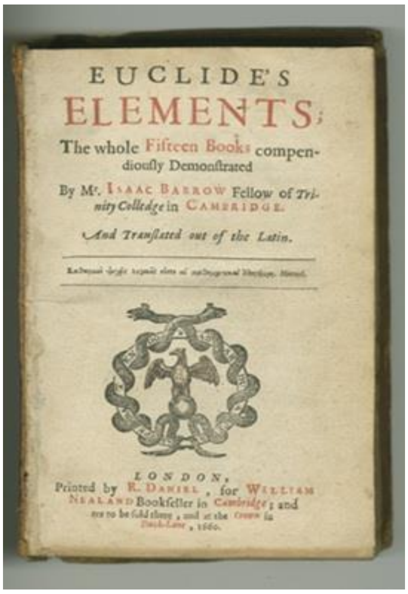
copy or shadow of the true Forms, which are the ultimate source of being and knowledge. '

मग कल्याणकारक अशा कल्पना, विचार हे 'फॉर्मस' अत्यंत वरच्या दर्जाचे. ते अमूर्त असतात. स्वयंसिध्द ही गोष्ट बुद्धीगामीच आहे, असा त्यांचा विश्वास होता हे नक्कीच. म्हणून ग्रीकांना नक्की सत्य काय असेल अशा विधानांची ओढ लागली होती. मग अशा दुविधेच्या काळामध्ये युक्लिडचा उदय झाला. त्याने तोपर्यंत माहीत असलेले भूमितीचे ज्ञान आणि संख्यागणिताचे ज्ञान एकत्र केले. त्यांचे अतिशय उत्तम असे संकलन केले. मात्र केवळ संकलनच असते तर नवीन ज्ञान आल्यावर हे पुस्तक आपले महत्त्व गमावून बसले असते. तसे झाले नाही.

या युक्लिडच्या ग्रंथात काय होते, याविषयी समजावून घ्यायच्या आधी त्याचे परिणाम बघू आणि हे योग्यच आहे. कारण, जणू गणितातील पाठ्यपुस्तकांचा राजा असलेल्या युक्लिडच्या 'एलिमेंट्स' विषयक प्रत्यक्ष माहितीच्या अगोदर या राजाच्या ललकाऱ्या देणे आणि ऐकणे उचितच आहे.

एलिमेंट्स हे बेस्ट सेलर पुस्तक आहे. खरं तर हा शब्द अत्यंत तोकडा आहे. बायबलच्या खालोखाल सर्वात अधिक वाचले गेलेले एलिमेंट्स हे पुस्तक आहे! एलिमेंट्सच्या तब्बल २००० आवृत्त्या झाल्या. तसेच गणिताचे अभ्यासक, तत्त्वज्ञ, राजकारणी असे विविध स्तरावरचे व पार्श्वभूमी असलेले वाचक एलिमेंट्सला लाभले. हे जसे अब्राहम लिंकनचे आवडते पुस्तक होते तसेच गणिती रसेलचे सुद्धा.

कोणत्याही प्राचीन ग्रंथांच्या वेगवेगळ्या कालखंडात आवृत्त्या निघतात. काही काळ ग्रंथ लुप्त होतो मग प्रगट होतो. एलिमेंट्स हे इसवी सन पूर्व २०० मध्ये लिहिले, मात्र त्यावरचे आज उपलब्ध असलेले भाष्य हे पाचव्या शतकातील प्रोक्लसचे. त्याने लिहिलेली, संपादित केलेली आवृत्ती अधिकृत मानली जाते. या नंतर युरोपचे अंधारयुग, डार्क एज येते. त्या वेळेला एलिमेंट्स लुप्त झाले. Renaissance, प्रबोधनाचा कालखंड १५५०च्या आसपास सुरू झाला. त्या वेळेपासून परत त्याचा अभ्यास सुरू झाला. मधल्या काळात, एलिमेंट्स इसवी सनाच्या आठव्या आणि नवव्या शतकात अरबी भाषेत भाषांतरित झाले, बाराव्या शतकानंतर, अरबीमधून लॅटिनमध्ये भाषांतरे झाली, मुख्यतः सिसिली आणि स्पेनमधील प्रयत्नांमुळे. या प्रक्रियेतील प्रमुख व्यक्तींमध्ये जेरार्ड ऑफ क्रेमोना, हर्मन ऑफ कॅरिंथिया आणि एडेलार्ड ऑफ बाथ यांचा समावेश होतो. त्यानंतर लॅटिन भाषांतरांचा प्रभाव युरोपमधील इंग्रजी, जर्मन आणि इटालियनसह विविध प्रादेशिक भाषांमधील पाठ्यपुस्तके आणि टीकांच्या विकासावर पडला.



इसाक बॅरो या गणितज्ञाने १६६० मध्ये प्रकाशित केलेली एलिमेंट्सची सोपी इंग्रजी आवृत्ती

स्रोत :

https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-isaac-barrows-edition-of-euclids-elements

गणिताच्या इतिहासकारांच्या मते युक्लिडचे एलिमेंट्स हे पुस्तक त्याआधी होऊन गेलेल्या ग्रीक गणितींच्या प्रमेयांचे संकलन आहे. ग्रंथात एकूण १३ विभाग आहेत. यात

पहिले ४ शालेय भूमितीतील त्रिकोण, वर्तुळ आणि एकरूपते विषयी आहेत, पाचवा गुणोत्तर आणि प्रमाण या विषयी आहे. विभाग ६ मध्ये गुणोत्तर, प्रमाणाचा भूमितीतील वापर म्हणजे समरूपता आहे. या रितीने संख्यांचे गुणधर्म, म.सा.वि., ल.सा.वि., मूळ संख्या, त्यांची अनंतता इ. गणिती गुणधर्मांचा खजिना आहे. जरी एलिमेंट्स हे मागील गणितींच्या कामावरती अवलंबलेले असले, तरीही त्यातील अत्यंत शास्त्रशुद्ध अशी पद्धत आणि क्रमबद्ध रितीने मागील सिद्ध प्रमेयांच्या आधारे नवीन प्रमेय सिद्ध करण्याची पद्धत, यामुळे एलिमेंट्सचे स्थान अपूर्व ठरते.

युक्लिडच्या एलिमेंट्सने गणित आणि एकंदरीत मनुष्याच्या विचारांमध्ये मूलभूत बदल घडवला. त्यांनी **भूमितीसाठी काही गृहीते, व्याख्या आणि नियम यांच्या आधारे अधिक प्रमेय मांडणे व त्यांची सिद्धता किंवा कोणत्या गृहीतावर अवलंबून आहेत आणि कोणत्या नियमानुसार आपण त्या विधानाच्या सत्यतेपर्यंत पोहोचतो, याचे उत्तम सादरीकरण केले. अर्थात निर्विवाद सत्य विधाने निर्माण करावयाची पद्धत विकसित केली.** या पद्धतीने जे विधान मिळू शकते, जे सादर करता येते त्याच्या सत्यतेबद्दल शंका उरत नाही. ही विचार करायची पद्धत 'अवगामी विचार पद्धती', 'Deductive Thinking' या नावाने रूढ झाली.

कालांतराने युक्लिडच्या एलिमेंट्सबद्दल संशोधनात पुष्कळ त्रुटी आढळल्या. उदाहरणार्थ, चार किंवा पाच गृहीतकांच्या ऐवजी वीस गृहीतकांची गरज भासू लागली तसेच एलिमेंट्समध्ये दिलेल्या काही सिद्धता या चुकीच्या ठरल्या. मात्र काळाच्या ओघामध्ये असे होतच असते. त्यामुळे कदाचित आता प्रत्यक्ष एलिमेंट्सपेक्षाही त्याच्यामुळे झालेला मानवी

विकासावरचा परिणाम अधिक महत्त्वाचा मानला पाहिजे. एलिमेंट्सची रचना सुरुवातीला व्याख्या, मग गृहीतके आणि नंतर नियम, त्यानंतर यांच्या आधारे तयार झालेले निष्कर्ष, निष्कर्षांचे सादरीकरण(demonstration) या पद्धतीने आहे. अतिशय बांधेसूद, चिरेबंदी रचना आहे. एकही विधान हे सादरीकरण किंवा सिद्धतेशिवाय नाही. विधानांच्या सिद्धता या व्याख्या, आधी सिद्ध झालेली विधाने, आणि नियमांचा वापर करून अवगामी पद्धतीने निष्पन्न झालेल्या आहेत. काही कृतीरूपी आहेत. एकूण २३ व्याख्यांपैकी काही थोड्या व्याख्या, नियम आणि गृहीतके खाली दिली आहेत. यांची त्या वेळची भाषा ही अर्थातच थोडी वेगळी आहे. त्याचा अर्थ आपल्या भाषेत समजून घ्यायला लागतो.

व्याख्या :

व्याख्या १. बिंदू म्हणजे ज्याला कोणताही भाग नसतो.

व्याख्या २. रेषा म्हणजे रुंदी नसलेली लांबी.

व्याख्या ३. रेषेची टोके बिंदू असतात. (सान्त, रेषाखंड)

व्याख्या ४. सरळ रेषा म्हणजे ती रेषा, जी तिच्यावरील बिंदूंवर समान रीतीने असते. (म्हणजे रेषेवरील कोणताही रेषाखंड दोन्ही बाजूला वाढवला तर तीच रेषा मिळते.)

व्याख्या ५. पृष्ठभाग म्हणजे ज्याला फक्त लांबी आणि रुंदी असते.

व्याख्या ६. पृष्ठभागाच्या कडा रेषा असतात. (सान्त पृष्ठ)

व्याख्या ७. सपाट पृष्ठभाग म्हणजे तो पृष्ठभाग, जो त्याच्यावरील सरळ रेषांवर समान रीतीने

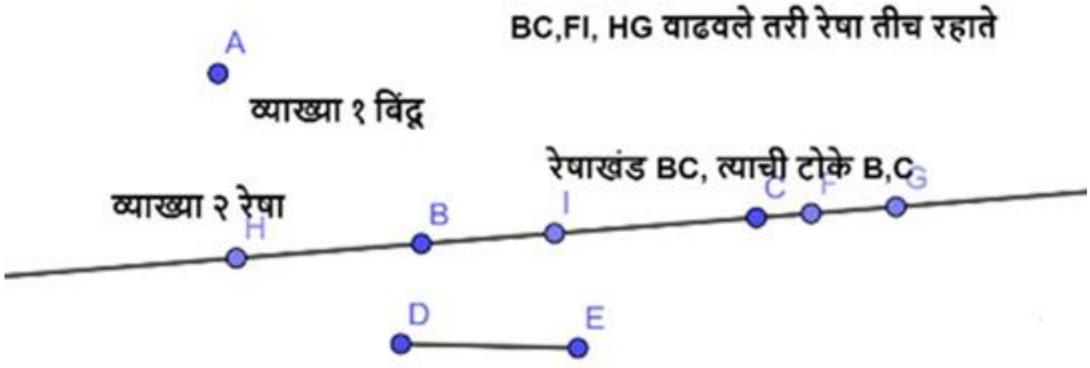
असतो. (पृष्ठभागावरील कोणतेही दोन बिंदू जोडून तयार होणारी रेषा त्याच पृष्ठभागावर असते.)

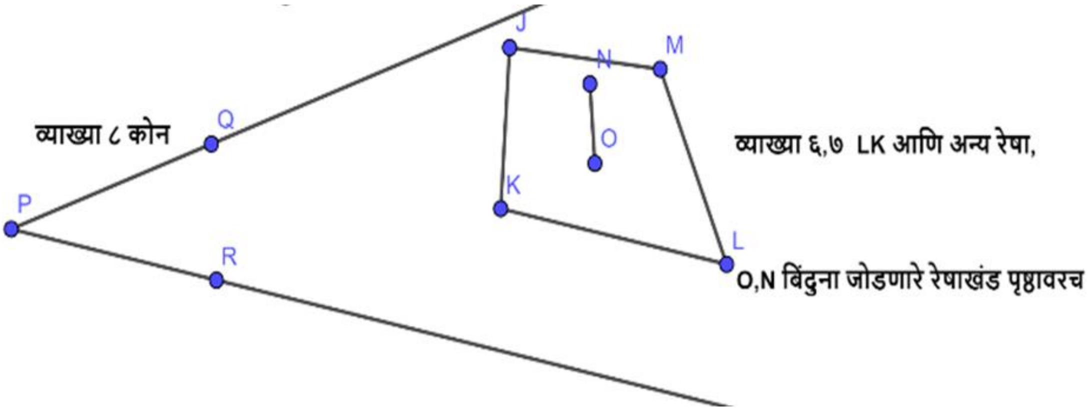
व्याख्या ८. कोन म्हणजे एकाच प्रतलातील दोन रेषा एकमेकांना छेदून सरळ रेषेत नसताना त्यांच्यातील झुकणे (Tilt). (दोन भिन्न सरळ रेषा जिथे छेदतात तिथे कोन होतो.)

व्याख्या ९. जेव्हा कोनाच्या बाजू (एकाच) सरळ रेषेत असतात, तेव्हा त्या कोनाला सरळ कोन म्हणतात.

व्याख्या १०. जेव्हा एक सरळ रेषा दुसऱ्या सरळ रेषेवर उभी राहून दोन संलग्न समान कोन करते, तेव्हा त्या समान कोनांपैकी प्रत्येक कोन काटकोन असतो आणि उभी असलेली सरळ रेषा दुसऱ्या रेषेवर लंब असते.

या व्याख्यांमध्येसुद्धा कल्पना आणि वर्णन असे दोन प्रकार आहेत. बिंदू, रेषा या कल्पना आहेत. सरळ रेषा, कोन इत्यादी व्याख्या वर्णनात्मक आहेत. खालील आकृतींमध्ये व्याख्या दाखवलेल्या आहेत.





गृहीतके:

१. दोन बिंदूंमधून एक रेषा जाते. (‘एक’ म्हणजे एक आणि एकच)

२. रेषाखंडाला न संपणाऱ्या रेषेत वाढवता येते. (अनंताची कल्पना)

३. बिंदू आणि अंतर दिले असता त्या बिंदूला मध्य कल्पून दिलेल्या अंतराएवढी त्रिज्या असणारे वर्तुळ काढता येते.

४. सर्व काटकोन एकदुसऱ्यासारखे असतात. (काटकोनाची व्याख्या ही वर्णनात्मक आहे, त्यामुळे हे सांगावे लागले.)

५. एक रेषा अन्य दोन रेषांना छेदते आणि जर त्या रेषांनी केलेल्या आंतरकोनांची बेरीज दोन काटकोनापेक्षा कमी असेल, तर त्या दोन रेषा एकमेकींना छेदतात. छेदन बिंदू ज्या बाजूच्या आंतरकोनांची बेरीज दोन काटकोनांपेक्षा कमी आहे त्या बाजूला असतो.

आता केवळ गणितच नव्हे तर सर्वच विषयामध्ये उपयुक्त असे नियम दिलेले आहेत.

१. समान गोष्टींमध्ये समान गोष्टी जोडून मिळणारी संख्या देखील समान असते.

$(x + y = x + y)$

२.	समान गोष्टींमधून समान गोष्टी वजा केल्यास बाकीची संख्या देखील समान असते.

$(x - y = x - y)$

३.	एकाच गोष्टीशी समान असलेल्या गोष्टी एकमेकांना समान असतात.

(A = B आणि B = C असेल, तर A = C.)

४.	संपूर्ण हे एका भागापेक्षा मोठे असते.

५.	एकाच गोष्टीची समान संख्या एकमेकांना समान असते. (A = A)

(आज हे A = A पहिला नियम घेतात)

या गृहीतकं आणि नियमांमुळे, भूमितीमध्ये एक मजबूत आणि तर्कसंगत आधार तयार झाला, ज्यामुळे अनेक भूमितीय समस्या सोडवण्यासाठी एक पद्धतशीर मार्ग उपलब्ध झाला. आता ही एक स्वयंपूर्ण व्यवस्था तयार झाली आहे. मग 'प्रमेय' या साधनाचा उपयोग करून निरीक्षणातून विधाने मांडली गेली आणि ती सिद्ध केली गेली. ही मांडणी अतिशय सुसूत्र आहे. प्रत्येक विधान मागील विधाने आणि गृहीतकांवर अवलंबून आहे. ते विधान सिद्ध करताना अगोदर स्वतंत्रपणे सिद्ध न केलेले विधान वापरलेले नाही.

प्राचीन गणितीय ग्रंथांमध्ये असते त्याप्रमाणे, जेव्हा एखाद्या प्रतिपादनाला अनेक वेगवेगळ्या प्रकरणांमध्ये सिद्धतेची आवश्यकता असे, तेव्हा युक्लिड अनेकदा त्यापैकी फक्त एकच (अनेकदा सर्वात कठीण) सिद्ध करत असे आणि बाकीचे वाचकांवर सोडत असे. थेऑनसारख्या नंतरच्या संपादकांनी अनेकदा या प्रकरणांच्या स्वतःच्या सिद्धता समाविष्ट केल्या.

एलिमेंट्सचे महत्त्वाचे परिणाम हे चार मुद्द्यांच्या आधाराने सांगता येतील. सर्वात पहिला, भूमितीचा अभ्यास करायची उत्तम दिशा मिळाली. दुसरा, तर्कशास्त्र आणि तार्किक विचारसरणीला नियमित, नेमके - 'स्टँडर्ड' स्वरूप दिले गेले. तीन, अन्य अभ्यास विषयांमध्येही, योग्य पद्धतीने निष्कर्षाला पोचण्यासाठी ही पद्धत वापरणे उपयुक्त ठरले. आणि त्या त्या शास्त्राची अधिक सुस्पष्ट मांडणी विकसित झाली. आणि चार, या विचार पद्धतीच्या आधारे विज्ञानामध्ये निरीक्षणांच्या आधाराने गृहीतके आणि मग गृहीतके आणि नियम यांच्या आधाराने अधिक निरीक्षण मिळवणे व ती सिद्ध झाली असे समजणे, हे संशोधनाचे स्वरूप नक्की झाले. वैज्ञानिक दृष्टीकोन तयार झाला. युक्लिडच्या ग्रंथाचे महत्व अवगामी विचारपद्धतीचा उगम आणि संगोपन करणारा ग्रंथ म्हणून निर्विवाद आहे.

§§§

लेखक : **किरण बर्वे,** भास्कराचार्य प्रतिष्ठान येथे गणित शिकवतात. विज्ञान व गणित विषयांत लेखन करतात. शैक्षणिक संदर्भ गटात सहभागी.

इमेल : barvekh@gmail.com

***(कळीचे शब्द :* गणित, भूमिती, युक्लिड, युक्लिडचा एलिमेंटस ग्रंथ, ग्रीक संस्कृती, थेल्स, थेल्सचे प्रमेय, प्लेटोची थेअरी ऑफ फॉर्म्स, युक्लिडच्या एलिमेंट्समधील व्याख्या आणि गृहीतके, Mathematics, Geometry, Euclid, Euclid's Elements, Greek culture, Thales, Theory of Forms, Plato)**