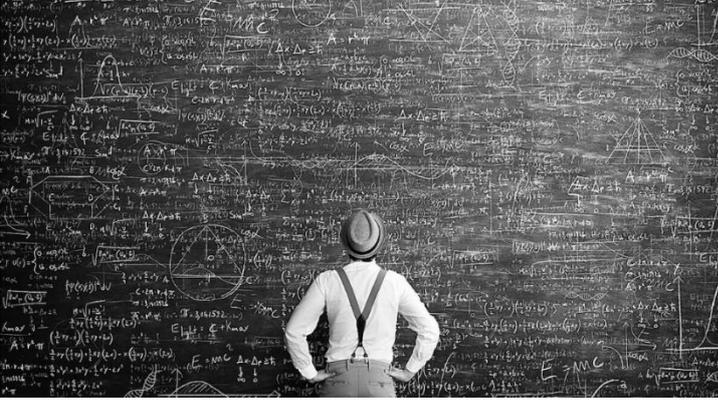


# अंत अन आरंभही...

लेखक : कौस्तुभ मुदगल

आकड्यांना आपल्या जीवनात किती महत्त्वाचे स्थान आहे, याची जाणीव मला



नुकतीच गणितावरचे एक पुस्तक वाचताना झाली. आज आपण बोलताना दर दोन वाक्यामागे एकदा तरी कुठल्या न कुठल्या आकड्यांचा उच्चार करतच

असतो (आत्ता या वाक्यातसुध्दा दोनदा आकड्यांचा उल्लेख आला आहे). जर का या आकड्यांचा शोधच लागला नसता तर? असा विचार केला तर आजवर मानवाने जी काही प्रगती केली आहे ती शक्यच झाली नसती. आकडे आणि आकड्यांची भाषा म्हणजे गणित. मानवजातीला आकड्यांची आणि पर्यायाने गणिताची उमज ही देणगी मिळालेली आहे. गणिताने आणि आकड्यांमुळे जगातील अनेक कोडी उलगडण्यात महत्त्वाची मदत केलेली आहे. शाळेत असताना आपल्यापैकी बहुतेकांना गणित हा विषय फारसा काही आवडायचा नाही. त्यावेळी आपल्याला वाटायचं, की आपल्या आयुष्यात गणित नसल्याने काय असा

फरक पडणारा आहे ? पण जसजसे उमगत गेले, तसतसे गणिताचे आणि आकड्यांचे महत्त्व कळू लागले. असो तर आपले जीवन हे आकड्यांनी व्यापून टाकलेले आहे.

आकड्यांचा शोध कसा लागला असावा? आदिमानवाच्या काळापासूनच माणूस हा काहीना काही मोजत आला असेलच आणि मोजण्यासाठी आकडे हे महत्त्वाचे साधन. त्याकाळी आकडे अस्तित्वात आले नसले, तरी त्याने आपल्याकडील वस्तू मोजण्यासाठी खडे, गवताच्या काड्या अशा अनेक वस्तू वापरायला सुरुवात केली असावी. पण या मोजणी पद्धतीमध्ये एक मोठी समस्या होती. उदाहरणार्थ, या पद्धतीने केलेल्या आपल्याकडील पशुधन मोजणीच्या खड्यांमधील किंवा काड्यांमधील एखादा खडा किंवा काडी हरवली तरी आपण केलेली मोजणी चुकण्याची खात्रीच होती. मग या मोजणी पद्धतीपेक्षा चांगली पद्धत शोधायच्या गरजेतूनच आकड्यांचा जन्म झाला.

माणूस लिहू लागला आणि त्याने आपल्या बोली भाषेला चिन्हांच्या भाषेत परावर्तीत केले. तरीही आज आपण बघतो तसे १, २, ३ अशा आकड्यांची चिन्ह प्रमाणित झाली नव्हती. रोमन आकड्यांची पद्धत आपण आजही वापरत आहोत. ती म्हणजे अक्षरांच्या भाषेत आकडे लिहिणे म्हणजे I, II, III, IV, V. ही पद्धतही कुचकामी होती कारण समजा तुम्हाला २००७ हा आकडा या पद्धतीने लिहायचा झाल्यास तो MMVII असा लिहावा लागतो. म्हणजे जसजसे आकडे मोठे होत जातात, तसतसे ते लिहिण्यास अवघड होत असते. मात्र पुढे आकड्यांसाठी प्रमाणित चिन्हे निर्माण करण्यात आली आणि ही समस्या सोडवण्यात यश आले. या आकड्यांच्या भाषेमध्ये मात्र एक महत्त्वाची उणीव होती. शून्य

या आकड्याचा शोध लागायचा होता. आज आपण कुठलाही आकडा उच्चारतो तेव्हा त्याचा संबंध हा शून्याबरोबर असतोच.

शून्य ही भारताने जगाला दिलेली अतिशय महत्त्वाची अशी देणगी आहे. अशा प्राचीन काळी लागलेल्या शोधांचा कालखंड नक्की सांगता येत नाही आणि भारतीय प्राचीन काळी लिखित परंपरा नसल्याने ते आणखी अवघड आहे. भारतीय तत्त्वज्ञानात शून्यावस्था म्हणजेच Nothingness ही संकल्पना मांडलेली आहे. बौद्धधर्मातही ही शून्यावस्था म्हणजे Emptiness ची संकल्पना सांगितली आहे.

सुमारे तीन हजार वर्षांपूर्वी छंद शास्त्राच्या आठव्या अध्यायातील २८ ते ३१ या सूत्रांमध्ये शून्य ही संकल्पना मांडली आहे. असे असले, तरीही शून्याचा पहिला संदर्भ मिळतो सातव्या शतकात. इ. स. सातव्या शतकात होऊन गेलेल्या भारतीय गणिती ब्रह्मगुप्ताने आपल्या 'ब्रह्मस्फुटसिद्धांत' या ग्रंथात ग्रह ताऱ्यांचे स्थान आणि अंतर याचे गणित मांडताना शून्य ही संकल्पना विस्तारपूर्वक मांडली आहे. ब्रह्मगुप्त या शून्य संकल्पनेबद्दल म्हणतो की 'एखादी संख्या जेव्हा त्याच संख्येमधून वजा केली, की जे उत्तर येते ते म्हणजे शून्य'. याचबरोबर ब्रह्मगुप्ताने शून्याविषयीचे अनेक नियम आपल्या ग्रंथात विषद केले आहेत. तो म्हणतो, की एखाद्या संख्येमधून शून्य वजा केल्यास किंवा बेरीज केल्यास उत्तर ती संख्याच येते. याच ग्रंथात त्याने उणे संख्यांबद्दलही लिहिले आहे. एखाद्या संख्येला शून्याने गुणले, तर उत्तर शून्य येते आणि एखाद्या संख्येला शून्याने भागले तरीही उत्तर शून्यच येते असे त्याने आपल्या ग्रंथात सांगितले आहे. येथे ब्रह्मगुप्ताची एक चूक झालेली आहे. कोणत्याही संख्येला शून्याने भागले, की उत्तर एक 'अनिश्चित संख्या' (indefinite) येते. शून्याने

भागाकाराच्या या संकल्पनेत ब्रह्मगुप्ताने चूक केली. कशी ती थोडी विस्तारपूर्वक आपण बघूया.

समजा, ७ भागिले २ करायचे आहे, तर त्याचे उत्तर ३.५ असे येईल. किंवा दुसऱ्या प्रकारे तुम्ही असेही म्हणू शकता, की २ गुणिले ३.५ म्हणजे ७. मग ७ हे उत्तर मिळविण्यासाठी शून्याला कुठल्या अंकाने गुणावे लागेल?’ तर या प्रश्नाचे उत्तर देता येणार नाही कारण शून्याला कुठल्याही अंकाने गुणले तर उत्तर शून्यच येते.

ब्रह्मगुप्तानंतर सुमारे चारशे वर्षांनी भास्कराचार्य या गणिती तज्ञाने गणित या विषयावर



**Guillaume de Hospital**

अनेक ग्रंथ लिहिले. भास्कराचार्यांनीही एखाद्या संख्येला शून्याने भागल्यावर काय उत्तर येईल या प्रश्नाचा उलगडा करण्याचा प्रयत्न केला. त्यांनी याचे उत्तर अनंत संख्या (infinity) असे सांगितले. पण तेही या प्रश्नाचे उत्तर देताना चुकले. तुम्हीही तुमच्या कॅलक्युलेटरमध्ये हे करून काय उत्तर येते ते बघा.

याचबरोबर आणखी एक प्रश्न निर्माण झाला तो म्हणजे शून्याला शून्याने भागल्यावर काय उत्तर येते. कुठल्याही संख्येला त्याच संख्येला भागल्यावर उत्तर एक येते, हा सार्वत्रिक नियम आहे. भास्कराचार्यानंतर सुमारे हजार वर्षांनी फ्रेंच गणिती ‘गियोम द’ओपिताल’ (Guillaume de Hospital) याने या प्रश्नाची उकल करण्याचा प्रयत्न केला. आजही त्याने केलेली या प्रश्नाची उकल ‘ल’ओपिताल रूल’ (L’Hopital Rule) या नावाने ओळखली जाते. त्याने याची उकल करताना केलेली मांडणी किचकट असल्याने त्याची फोड न करता

आपण या गणितज्ञाच्या आयुष्यात घडलेली एक अतिशय रोचक घटना बघूया. तर हे L'Hopital महाशय घोडदळाचे प्रमुख होते. पण आपण रातांधळे असल्याचे सांगून त्यांनी ती नोकरी सोडून दिली. रातांधळेपण हे केवळ कारण होते कारण हे महाशय पैशांनी गब्बर होते आणि त्यांना गणित या विषयात काम करायचे होते. मग या महाशयांनी त्याकाळी प्रसिद्ध असलेले स्वित्झर्लंडचे गणिती जोनाथन बर्नौली (Johanan Bernoulli) यांची खाजगी शिकवणी लावली. हे जोनाथन महाशय जरा होते भांडकुदळ.

काही दिवसांनी L'Hopital यांनी गणितावरील एक पुस्तक प्रकाशित केले. या पुस्तकात त्यांनी L'Hopital Rule ची मांडणी केली होती. खरेतर या पुस्तकात बर्नौली यांनी दिलेल्या धड्यांचाच सारांश होता. L'Hopital महाशयांनी बर्नौली यांचा अगदी पुसटसा उल्लेख या पुस्तकात केला. यामुळे बर्नौली फारच नाराज झाले. १७०४ साली L'Hopital यांच्या मृत्युनंतर बर्नौली यांनी हे पुस्तक त्यांनी स्वतः लिहिल्याचा दावा केला.

इतिहासात शून्याविषयी माहिती नसल्याने आणखी एक गडबड झालेली आहे. आपण वापरत असलेले ग्रेगोरीयन कॅलेंडर हे १५८२ साली अस्तित्वात आले. या कॅलेंडरनुसार इ.स. पू. १ या सालानंतर लगेचच इ.स. १ हे साल येते. म्हणजे येशू ख्रिस्ताचा जन्म हा इ. स. १ साली झाला. त्यानुसार ख्रिस्त जेव्हा १०० वर्षांचा होईल तेव्हा साल असेल इ. स. १०१. आजही आपण जेव्हा म्हणतो की २० वे शतक संपले तेव्हा प्रत्यक्षात ख्रिस्ताच्या जन्मानंतर २००१ साली २००० वर्ष पूर्ण होतात.

हे झालं शून्याविषयी. आता गणिताचा विषय निघालाच आहे तर जाता जाता गणितातील माहिती असलेला प्रसिद्ध सिद्धांत म्हणजे पायथागोरसच्या सिद्धांताविषयी.

अनेकांना या सिद्धांताने प्रचंड त्रास दिलेला आहे. तर भारतात जेव्हा राजकुमार सिद्धार्थ हा बुद्ध या पदाला पोहोचला तेव्हा ग्रीक तत्त्ववेत्ता पायथॅगोरस याचा जन्म झाला होता. पायथॅगोरस सिद्धांतांविषयी अनेक वादविवाद आहेत. पायथॅगोरसच्या आधीही या सिद्धांतांविषयी लोकांना माहिती होती याचे पुरावे बॅबिलोनियन संस्कृतीत सापडले आहेत. तर आपला समज म्हणजे हा सिद्धांत मांडला पायथागोरसने. पण तसे काही झालेले नाही. पायथागोरसच्या शिष्यांनी त्याच्यानंतर इ. स. पू. सहाव्या शतकात Pythagoreanism नावाने एक पंथ निर्माण केला. याच पंथातील कोणीतरी हा सिद्धांत जगासमोर आणला आणि त्याला पायथागोरसचे नाव दिले.

जगभरात लागलेल्या सगळ्या शोधांच्यामागे गणिताचा भक्कम पाया आहे आणि शून्य या संकल्पनेशिवाय गणित हा विषय अपूर्ण आहे. जगात शून्य अस्तित्वात नसता तर आपण संगणक क्षेत्राप्रमाणेच इतर अनेक क्षेत्रांमध्ये प्रगती करू शकलो नसतो. कुठल्याही गोष्टीची सुरुवात करून देणाऱ्या शून्याची ही नवलकथा.

मूळ लेख : <https://dhaandola.co.in/2024/10/31/zero/>

§§§

---

लेखक : कौस्तुभ मुदगल, छपाईचा व्यवसाय, 'धांडोळा' या त्यांच्या ब्लॉगवर लेख लिहितात. इ-मेल : [dhaandolablog@gmail.com](mailto:dhaandolablog@gmail.com)

(कळीचे शब्द : गणित, शून्य, शून्याचा शोध, भारतीय गणिती ब्रह्मगुप्त, गियोम द'ओपिताल, ओपिताल रूल, *Mathematics, Zero, Guillaume de Hospital, , L'Hopital Rule*)