

शैक्षणिक संदर्भ अंक १४१ एप्रिल - मे २०२३

गणिती रूपकांची न्यायी दुनिया

भाग १

लेखक : किरण बर्वे

गणिती रूपकांची न्यारी दुनिया

भाग १

लेखक : किरण बर्वे

या लेखमालेत आपण प्रश्न सोडवताना कोणत्या पायऱ्या असतात हे समजावून घेतले आहे. तसेच या पायऱ्या आपल्याला दिशा देतात आणि आपण प्रश्न अधिक समजावून घेऊन उत्तरे कशी काढू शकतो हेही बघितले. या सर्व प्रतिपादनात आपण कोणत्या गणिती पद्धती व्यावहारिक प्रश्न सोडवताना उपयोगी ठरतात याचा अभ्यास केला नाही. सर्वसाधारणपणे प्रश्न नेमका असताना, तसेच प्रश्न संदिग्ध असतानासुद्धा एका चौकटीच्या आधारे पायरीपायरीने प्रश्न सोडवण्याचा आराखडा आपण याआधी समजून घेतला आहे. आता या आणि पुढच्या लेखात सध्या वापरलेल्या जाणाऱ्या दोन पद्धतींचा परिचय करून घेऊ. मी जाणीवपूर्वक गणिती पद्धती म्हटले आहे, रीती म्हटले नाही. कारण एक दृष्टीकोन आणि काही गणितातील रीती मिळून या पद्धती तयार झाल्या आहेत.

व्यवहारातील परिस्थितीचे गणिताच्या भाषेत वर्णन करावयाचे. हे वर्णन अधिकाधिक नेमके करणे ही नेहमीच व्यावहारिक गणिते सोडवायची पहिली पायरी असते. व्यवहारातील प्रश्न गणिताच्या भाषेत मांडता येतात आणि मग व्यवहारातील प्रश्न हा गणितातील प्रश्न बनतो. गणितातील प्रश्न सोडवण्यासाठी असलेली रीत वापरून त्या गणितातील प्रश्नाचे उत्तर मिळते. अर्थात व्यवहारातून गणिताकडे येताना जो विचार केला त्याच विचाराच्या साहाय्याने गणिताच्या उत्तराचे रूपांतर आपण व्यावहारिक प्रश्नाच्या उत्तरात करू शकतो. ही पद्धत समजून घ्यायला एक अत्यंत सोपे शालेय अभ्यासातील गणित सोडवूया.

अमरने सुरुवातीला ताशी ३० कि. मी. प्रती तास वेगाने जाणाऱ्या आगगाडीने प्रवास केला आणि पुढचा प्रवास ४० कि. मी. प्रती तास वेगाने धावणाऱ्या बसने केला आणि तो इच्छित स्थानी पोचला. एकूण प्रवास १०० कि. मी. झाला आणि संपूर्ण प्रवासाला तीन तास लागले तर अमरने बसने किती वेळ प्रवास केला?

आपण प्रथम प्रवास डोळ्यासमोर आणूया. वाटल्यास एक रेष काढून वर्णन करू.

अ ब क

‘अब’ प्रवास आगगाडीने आणि ‘बक’ प्रवास बसने झाला असे समजू. या व्यवहारात, प्रवासात, वेग, एकूण अंतर आणि एकूण वेळ दिली आहे. आणि त्यातील ‘बक’ अंतर कापायला लागलेला वेळ विचारला आहे. आपण व्यवहार, नेमके काय घडले ते समजून घेतले आणि दिलेल्या गोष्टीचा अर्थ लक्षात घेतला आहे.

आता वेग, अंतर आणि वेळ या संबंधीचे सूत्र आपल्याला माहित आहे. सूत्र जरी सोपे आणि माहितीचे असले तरी ह्या सूत्राद्वारे आपण प्रवास, वेळ आणि वेग या व्यवहारातील गोष्टी गणिताद्वारे नेमकेपणाने मांडणार आहोत. परिस्थितीचे गणितीकरण करणार आहोत.

सूत्र आहे : अंतर = वेग x वेळ

‘अक’ हे एकूण अंतर, एकूण वेळ आणि आगगाडीचा तसेच बसचा वेग माहित आहे. आगगाडीच्या प्रवासाचा वेळ काढला तर आगगाडीने किती अंतर गेलो ते समजेल. एकूण अंतरातून म्हणजे ‘अक’ मधून आगगाडीने प्रवास केला ते ‘अब’ अंतर वजा करून ‘बक’ हे अंतर मिळेल. आणि मग बसचा प्रवास ‘बक’ / बसचा वेग यासह बसच्या प्रवासाचा वेळ काढता येईल. ही आपली प्रश्न सोडवण्याची योजना झाली. **आपण प्रत्यक्ष किंमती न वापरता आपला पुढचा मार्ग स्पष्ट केला आहे.** अर्थात किंमती बदलल्या तरीही ही पद्धत वापरता येणार आहे. परिस्थितीचे गणितीकरण केल्यानंतर, आगगाडीने केलेल्या प्रवासाचा वेळ काढायचा असे ठरवून गणित सोडवू.

आपल्याला आगगाडीने किती वेळ प्रवास केला हे दिलेले नाही. आपण आगगाडीने ‘t’ तास प्रवास केला असे समजू.

एकूण वेळ, ३ तास - आगगाडीच्या प्रवासाचा वेळ ‘t’ तास = बसच्या प्रवासाचा वेळ ‘३ - t’ तास.

आता वेग x वेळ = अंतर, हे सूत्र परत वापरून,

$$३० t + ४० (३ - t) = १००$$

व्यवहाराच्या गणितीकरणातून आपण सूत्र आणि उत्तर काढण्याची योजना बनवली. गणिती प्रश्न सोडवायच्या गणितातील पद्धतीनुसार आपण मांडणी केली आहे.

$$३०t + १२० - ४०t = १०० \text{ म्हणजेच } १०t = २०.$$

आगगाडीने २ तास प्रवास केला आणि बसने १ तास प्रवास केला. उत्तर आले! हो का? आलेले उत्तर नक्की बरोबर आहे का? हा प्रश्न दुसऱ्या कोणी विचारो वा न विचारो आपण स्वतःला नक्की विचारला पाहिजे. (नेहमी ताळा करून पाहायला हवा.)

अमर आगगाडीने २ तासात ६० कि. मी. अंतर गेला आणि उरलेले ४० कि.मी. त्याने १ तासात कापले ४० कि.मी. प्रती तास वेग असणाऱ्या बसने !! हा ताळा अत्यंत महत्त्वाचा आहे.

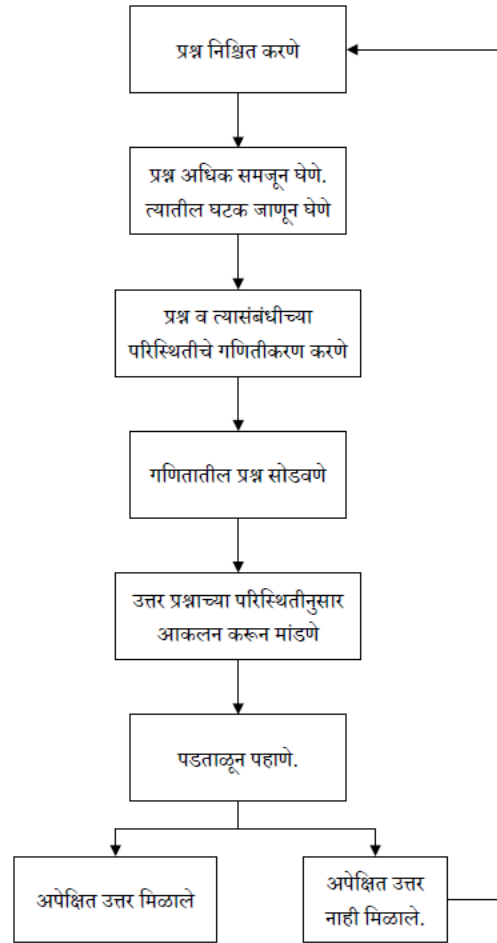
गणिती रूपक म्हणजे वरील गणित सोडवताना वापरलेली पद्धत. व्यवहारातील परिस्थिती समजून घेणे. नंतर तिचे गणितीकरण करणे, प्रश्न गणितात मांडणे, योग्य सूत्र, पद्धत वापरून गणितातील प्रश्न सोडवणे, गणिताच्या भाषेत गणिताचे उत्तर काढणे आणि आलेल्या उत्तराचा आपल्या 'गणितीकरण'बरोबरच व्यवहारात अर्थ लावणे आणि मग ताळा करून खरेच आपला व्यवहारातील प्रश्नाचे उत्तर मिळाले का, हे तपासणे. उत्तर योग्य आहे, मग आपले काम झाले.

वर वर्णन केलेली पद्धत म्हणजेच गणिती रूपकाची पद्धत. गणिती रूपक म्हणजे Mathematical Modelling. वाचकाना शंका येऊ शकेल की वर जे सांगितले आहे ते अगदी सोपे शाळेतील उदाहरण आहे आणि प्रत्यक्षात आम्ही जे प्रश्न गणिती रूपक वापरून सोडवले गेले असे वाचतो, ऐकतो ते अत्यंत गुंतागुंतीचे असतात. केवळ गणिती रूपकाची तोंडओळख होण्यासाठी सुरुवातीला आपण अगदी साधे सोपे प्रश्न विचारात घेऊ, शेवटी

एक थोड्या गुंतागुंतीच्या प्रश्नाचं गणिती रूपक तयार करू. वर सांगितलेली पद्धत दिसायला सोपी असली तरी बहुगुणी आहे. त्यात काही अधिक रंग भरू या आणि गणिती रूपक म्हणजे काय याचा प्राथमिक अभ्यास करू. नंतर या पद्धतीची तुलना आपण प्रश्न सोडवायच्या पद्धतीशी करू. शेवटी रूपकाद्वारे सोडवलेले महत्वाचे व्यावहारिक प्रश्न माहीत करून घेऊ.

आकृती १ मधील प्रत्येक टप्पा आवश्यक तितक्याच विस्ताराने समजून घेऊ.

(कारण एकेका पायरीवर मोठा लेख लिहिता येईल.) म्हणजे एकूण पद्धत ध्यानात येईल. पहिल्या दोन मुद्यांसंबंधी आपण चर्चा केली आहे. प्रश्नाशी निगडित घटक समजून घेणे निश्चित स्वरूपाच्या प्रश्नात सोपे असते. मात्र संदिग्ध प्रश्न समजून घेणे खूप महत्त्वाचे व थोडे अवघड. उत्तराकडून दिलेल्या माहितीकडे येणे कधी कधी जास्त उपयुक्त ठरते. अशा वेळी परिस्थितीशी निगडित घटक



आकृती १ : गणिती रूपक रूपरेषा

अनेक असतात मात्र त्या घटकांचे महत्त्व प्रश्नाच्या स्वरूपानुसार आणि उत्तर काय हवे आहे त्या संदर्भात कमी अधिक ठरते. परिस्थिती तीच असते. त्या परिस्थितीचे

गणितीकरण केले की ते अनेक प्रश्नांसाठी उपयुक्त ठरते. कोणत्या घटकाचे महत्त्व अधिक यानुसार प्रश्नाचे स्वरूप बदलते. प्रथम परिस्थितीचा एकंदरीत अंदाज घेऊन त्यात कोणते नियम लागू पडतात, त्यातील कोणते घटक मोजता येऊ शकतात, कोणता घटक बदलला तर मोठा बदल होईल, अशा प्रश्नांद्वारे आपण गणितीकरणाला सुरुवात करतो. यातून परिस्थितीतील घटक, त्यातील प्रभावी घटक, गणितात नेमके सांगता मोजता येण्याजोगे घटक शोधल्यानंतर मग नेमका प्रश्न घेऊन, म्हणजेच वरील घटकांच्या रचनेतून निर्माण झालेला प्रश्न, असे अधिक नेमके स्वरूप व्यावहारिक प्रश्नाला येते. इथे अत्यंत महत्त्वाची गोष्ट सांगितली आहे. घटकांचे मोजमाप करता येणे, त्यासाठीची चौकट तयार करणे, हे खूप आवश्यक. एकदा का मोजता येणारे घटक सापडले, मग त्यांचे परस्परसंबंध नेमके करता येतात. मग हे संबंध सूत्रात मांडता येतात. घटक, त्यांचे परस्परसंबंध यांच्या आधारे 'गणितीकरण' करता येते.

एक उदाहरण मी सातत्याने देत असतो. 'चहा करण्याचे' उदाहरण गणिती रूपकाची पद्धत समजून घेण्यासाठी उपयुक्त ठरेल. अहो चहा तो काय, तो वेळी अवेळी पिणेही नेहमीचेच, त्यात गणिती रूपक? असे वाटणे स्वाभाविक आहे. मात्र या लेखमालेद्वारे अत्यंत साधी सोपी उदाहरणे तपशीलात जाऊन सोडवून आपण प्रश्न सोडवण्याची तत्वे समजून घेतली. कदाचित ती उदाहरणे फुसकी वाटली असतील. मात्र त्याद्वारे समजून घेतलेली तत्वे महत्त्वाचीच होती. त्याच दृष्टीकोनातून चहाचे उदाहरण आपण समजून घेणार आहोत.

चहा करायचा आहे, तर प्रथम प्रक्रिया ध्यानात घेतली. पाणी घ्या, त्यात अंदाजाने साखर घाला, थोड्या वेळाने बचकभर किंवा चिमूटभर चहाची पत्ती घाला. एकीकडे पाणी

उकळत राहू दे. थोड्या वेळाने साखर, चहा आणि पाणी यांचे आधण उकळत असताना गॅस बंद करावा. मग घरी दूध जितपत असेल त्याप्रमाणे गाळलेल्या चहात दूध घालावे. हा



तयार झाला काकूंचा चहा. हयात गेली चहा करण्यात त्यांची; त्यांचा अंदाज आपल्या मोजमापापेक्षा अचूक! मात्र नवऱ्याने, मुलाने, सुनेने केलेला चहा काकूंना आवडणे शक्य नाही आणि चांगला चहा कसा करायचा हे त्या शिकवूसुद्धा शकत नाहीत. कारण आमच्याकडे मोजमाप नाही. जे मोजमाप आहे ते खास काकूंचेच! मात्र खालील पद्धत सांगितली की सरावाने सगळ्यांना

चहा करता येतो. एक कप चहा करण्यासाठी पाऊण कप पाणी घ्यावे. थोडावेळ पाणी गरम करावे आणि त्यात १ चमचा साखर घालावी. पाणी उकळू लागले की त्यात एक लहान चमचा चहा पूड घालावी. जरा मोठा गॅस बारीक आचेवर ठेवून मिश्रण ३ मिनिटे उकळल्यावर गॅस बंद करावा. चहा मुरू द्यावा २ मिनिटे आणि मग गरम केलेले दूध त्यात घालावे. चहा करण्याची प्रक्रिया तीच आहे. काकूंच्या पद्धतीने काकूंनाच चहा करता येईल इतरांना नाही. मात्र नंतर तीच प्रक्रिया आपण नेमकेपणाने सांगितली. एका अर्थाने आपण चहा करण्याच्या प्रक्रियेचे गणितीकरण केले.

चहा कसा करतात ही माहिती असेल तरच पुढे जाता येईल. याचाच अर्थ, जो व्यावहारिक प्रश्न सोडवायचा आहे त्याचे गणितीकरण करण्यासाठी परिस्थितीचा आणि प्रक्रियेचा अभ्यास असायला पाहिजे. परिस्थितीचे जास्तीत जास्त आकलन असावे.

नंतर आपण एक महत्वाची गोष्ट केली. प्रक्रियेतील प्रत्येक टप्पा मोजता येतो का याचा विचार करून टप्प्याटप्प्याने मोजमाप आणि काय काय करायचे हा क्रम मांडला. नंतर साधारणपणे एक कप चहा करावयाची पद्धत गणितीकरण करून मांडली आहे. जरी स्पष्ट उल्लेख केला नाही, तरी येथे प्रमाणाचा विचार केला आहे. इथे परिस्थितीचे गणितात रूपांतर पूर्ण / पुरेसे झाले असे म्हणता येईल.

चहा करण्यात प्रश्न काय असायचा आहे? करायची इच्छा असेल तर वरील पद्धत आणि प्रमाण वापरून चहा नक्की करता येईल. बघा हं कसा प्रश्न उपस्थित होतो ते. मी घरी एकटा /एकटी आहे, जोडीदाराच्या जवळची मंडळी येणार आहेत. फक्त चहा पिऊन पुढे जाणार आहेत. अर्थात चांगला, त्यांना आवडेल असा चहा करावा अशी माझी प्रामाणिक इच्छा आहे. एकूण पाचजण आहेत मात्र त्यातील दोघांना बिनसाखरेचा चहा हवा आहे. एक कडक चहा पितात, तर नेहमीप्रमाणे चव असलेला चहा दोघांना आवडतो. पहिल्या प्रक्रियेत चहाच्या स्वादाचा विचार नव्हता. रुचीभिन्नतेनुसार विविध चवींचा चहा कसा करता येईल? तो कमीत कमी वेळात आणि कष्टात करण्यासाठी कोणती प्रक्रिया वापरावी? हा प्रश्न आपल्यासमोर आहे.

वेगवेगळ्या लोकांना वेगवेगळ्या चवींचा चहा हवा आहे, असे कुठे असते, या प्रकारचा विचार मी केला. म्हणजेच या प्रकारचा प्रश्न कोणी सोडवला आहे का, कसा सोडवला याचा विचार केला आणि मग आता काय करायचे ते ठरवले. आराखडा आठवला, माहितीचे विश्लेषण, ज्या गोष्टी जवळ आहेत, दिलेल्या (given) आहेत त्यांची अधिक ओळख करून घेणे, अशा प्रकारच्या प्रश्नाचे उत्तर कसे काढले यांची माहिती घेणे असे टप्पे आपण पूर्ण केले आणि एक योजना बनवली. कोणती चव कशामुळे येते हेही

ध्यानात घेतले. कडक चहा चहापत्ती जास्त घालून करता येईल किंवा चहा जास्तवेळ उकळवून करता येईल.

चहा करायच्या प्रक्रियेत साखर पाणी गरम करताना न घालता सर्व प्रक्रिया करायची असे ठरवले. पाणी उकळू लागले की त्यात योग्य प्रमाणात चहाची पूड घातली. थोडा वेळ उकळल्यावर कपांमध्ये चहा गाळून घेतला. मात्र थोडे चहा, पाण्याचे मिश्रण गॅस लहान करून गरम करत ठेवले. कपात दूध घातले. ट्रेमध्ये कप ठेवले. मग एका भांड्यात साखर घेतली, प्रत्येक कपाबरोबर एक चमचा ठेवला आणि पाहुण्यांसमोर हा ट्रे ठेवला. गोड बोलून सांगितले, “मी मुद्दामच असे केले म्हणजे प्रत्येकाला जितकी हवी तितकी साखर घेत येईल.” ज्यांना कडक चहा हवा होता त्यांना “तुमचा चहा घेऊन येतोच हं, स्पेशल करून आणतो”, असे सांगितले. मग अधिक उकळलेले चहाचे मिश्रण घेतले, त्यात जरा जास्त साखर घातली, दूध घातले आणि त्यांना तो स्पेशल चहा दिला. पाहुण्यांना त्यांच्या आवडीनुसार चहा मिळाला.

गणित म्हणजे तर्कबुद्धी वापरून प्रश्न सोडवला. मात्र त्याचबरोबर प्रमाणातील बदल, प्रक्रियेच्या क्रमामध्ये बदल गणितीकरणातून स्पष्ट झाले. अगदी समीकरणच मांडले नसले, तरी मोजमाप, घटकांतील परस्परसंबंध, उत्तराशी नाते, हे गणितीकरणातील सर्व पैलू या उदाहरणात आले. या प्रकारच्या अभ्यासानंतर विशिष्ट पैसे देऊन एक चकती विकत घ्यायची आणि ती चकती यंत्रात घातली की आपोआप एक कप चहा कपात ओतला जातो, असा शोध लावला गेला. या चहाची चव त्या त्या भागातील ग्राहकांची आवड लक्षात घेऊन, मग पाणी, साखर, चहा आणि दूध यांचे विविक्षित प्रमाण ठेवून ठरवलेली असते. आकृती १ मधील तक्ता आता परत पहा. पाच पायऱ्या आपण पूर्ण केल्या आहेत.

ताळा करण्यासाठी पाहुण्यांशी संवाद साधला. कसा झाला होता चहा, तुम्हाला हवा होता तसा मिळाला का, असे प्रश्न विचारले. सर्वांना चहा आवडला. एकाने मात्र मोकळेपणाने सांगितले, की थोडा अजून गरम असता तर आवडले असते.

म्हणजेच उत्तर व्यवहारात उपयुक्त होते, जे अपेक्षित होते तसे झाले असे समजले. आणि चहा या प्रकारात थोडा गार होतो असे निरीक्षणही समोर आले. अर्थात गणिती रूपकाच्या सर्व पायऱ्या पूर्ण झाल्या. मुख्य म्हणजे जोडीदार समाधानी राहिला!

पुढच्या भागात एक महत्त्वाचे आणि अनेक वेगवेगळ्या संदर्भात लागू पडेल असे व्यवहारातील उदाहरण बघू या.

क्रमशः

§§§

लेखक : किरण बर्वे, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान येथे गणित शिकवतात. विज्ञान व गणित विषयांत लेखन करतात. शैक्षणिक संदर्भ गटात सहभागी.

इमेल : barvekh@gmail.com

(कळीचे शब्द : गणिती रूपक, गणिती रूपक रूपरेषा, परिस्थितीचे गणितीकरण करणे)

शैक्षणिक संदर्भ द्वैमासिकाविषयी

शैक्षणिक संदर्भ हे पालकनीती परिवाराचे द्वैमासिक ऑगस्ट १९९९ पासून संदर्भ सोसायटी प्रकाशित करत आहे. मराठीतून चांगले विज्ञान वाचायला मिळावे, शालेय व महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांच्या कुतूहलाला प्रोत्साहन मिळावे, अनुभवांना जोडून असलेल्या विज्ञानाची सहज ओळख व्हावी आणि समाजात वैज्ञानिक दृष्टिकोन वाढावा, हे याचे उद्देश आहेत.

२०१८ सालापासून आम्ही शैक्षणिक संदर्भची छापील आवृत्ती न काढता इ-अंक प्रकाशित करत आहोत व इमेल आणि व्हॉट्सॅपच्या माध्यमातून वाचकांपर्यंत पोहोचवत आहोत.

आपल्याला आमचे अंक वाचायचे असल्यास आपला इ-मेल पत्ता आणि व्हॉट्सॅप क्रमांक (ऐच्छिक) आम्हाला sandarbh.marathi@gmail.com वर पाठवावा. दर आठवड्याला एक लेख व दर दोन महिने पूर्ण झाल्यावर आठ लेखांचा एकत्रित एक अंक असे आपल्याला पीडीएफ स्वरूपात मिळतील.

www.sandarbhsociety.org या वेबसाईटला जरूर भेट द्या. जुने अंकही त्यावर पीडीएफ स्वरूपात उपलब्ध आहेत.

हा उपक्रम विनामूल्य आहे, पण आपण आपला सहभाग ऐच्छिक देणगी रूपात संदर्भ सोसायटीकडे पाठवू शकता. अधिक माहिती वेबसाइटवर उपलब्ध आहे.

- संपादक मंडळ, शैक्षणिक संदर्भ व विश्वस्त मंडळ, संदर्भ सोसायटी