

शैक्षणिक संदर्भ अंक १३८ (ऑक्टोबर - नोव्हेंबर २०२२)

प्रश्नांकडून उत्तरांकडे प्रवास - भाग ३

आधी कळस मग पाया

लेखक : किरण बर्वे

प्रश्नांकडून उत्तरांकडे प्रवास - भाग ३

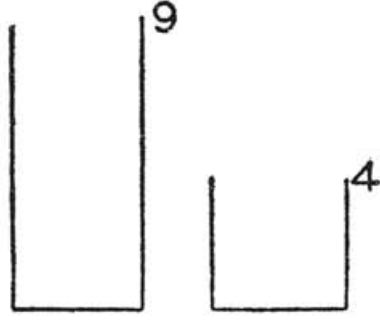
आधी कळस मग पाया

लेखक : किरण बर्वे

आधीच्या लेखामध्ये आपण उत्तर शोधण्यासाठी उपयुक्त पद्धतीचा आराखडा समजून घेतला आहे. त्याच वेळी दिलेली माहिती, त्यात असलेले नियम आणि संख्यात्मक माहिती, यांचे विश्लेषण करून मग उत्तरापर्यंत कसे जाता येते याचे एक अगदी सोपे उदाहरण बघितले. माहितीचे विश्लेषण हा आपल्या पद्धतीचा गाभा आहे. या लेखात जे उत्तर हवे आहे, जी 'अपेक्षित स्थिती' आहे, तिच्यावर बारकाईने विचार करून योजना कशी बनवायची हे बघणार आहोत. एक सोपे कोडे सोडवताना पद्धतीचा हा पैलू उलगडणार आहोत. शाळेत असताना किंवा नंतर आपण हे कोडे सोडवलेही असेल.

नदीमधून, पाण्याच्या मोठ्या साठ्यातून, तुम्हाला बरोबर ६ लिटर पाणी काढायचे आहे. तुमच्या जवळ ९ लिटरचे एक आणि ४ लिटरचे एक, अशी दोनच भांडी आहेत. बरोबर ६ लिटर पाणी कसे काढाल?

अनीता, रोहन आणि आशुतोष. तिघे कोडे कसे सोडवतात, बघू या. तिघांनी कोडे



आकृती १: ९ व ४ लिटरची भांडी

बघितले व मनातल्या मनात गणित करू लागले.

समजा ४ लिटरचे भांडे भरले ते ९ लिटरच्या रिकाम्या भांड्यात ओतले... रोहन विचार करत होता. अनिताला वाटले अगोदर ९ लिटरचे भांडे

भरून मग काय करता येईल ते बघू. तसे तिघांनी

वेगवेगळे प्रयोग करून बघितले. एकमेकांना ते आपला विचार सांगू लागले की गोंधळ उडत होता. म्हणून विचार मनातल्या मनात सुरू झाला.

थोड्या वेळाने एका वेळेला एकजण बोलेल असे ठरले.

आता आपण आपल्या प्रश्न सोडवायच्या पायऱ्यानुसार मांडू.

काय हवे आहे : ६ लिटर पाणी.

माहिती : नदी आहे. म्हणजे भरपूर पाणी उपलब्ध आहे तसेच पाणी ओतूनही देता येईल. ९ लिटर आणि ४ लिटरचे भांडे आहे.

माहिती समजावून घेणे : ९ आणि ४ लिटर भांड्यांचा वापर करायचा आहे. त्यांच्यावर कोणत्याही खुणा नाहीत म्हणजे, १ लिटर, २ लिटर इ. दाखवणाऱ्या.

६ लिटर पाणी एखाद्या भांड्यात मिळाले असे जेव्हा नक्की म्हणतो त्या वेळी भांड्यावर खुणा असतात आणि मग ६ लिटरच्या खुणेपर्यंत पाणी भरलेले असते.

लक्षात घ्या आशुतोष मला ६ लिटर पाणी मिळाले आहे असे गृहीत धरून विचार करत आहे. त्याच्याकडे अशा खुणा असलेले भांडे ६ लिटरपर्यंत भरलेले आहे असे त्याला डोळ्यासमोर दिसत आहे.

मुले सतत विचारात आहेत.

काय हवे आहे :६ लिटर पाणी

अट : भांड्यांवर खुणा नाहीत.

मुलांनी प्रथम मनातल्या मनात प्रयोग केले. या भांड्यातून पाणी दुसऱ्यात ओतू. एक भांडे रिकामे करू. वेगवेगळ्या क्रमाने या क्रिया करू. इ. प्रश्न, त्यातील माहिती वापरून थेट सोडवायचे प्रयत्न केले. ते थकले. ही पद्धत काही फारसे देत नाही. विशेष प्रगती होत नाही असे जाणवले. (कदाचित, करता करता जमूनही जाईल, पण अपघाताने.)

आशुतोषला रोहनने विचारले, समजा आपण 6 लिटर पाणी मोजले आहे. तर ते 9 लिटरच्या भांड्यात असणार. आता एक वेगळी सुरुवात झाली.

जे हवे आहे ते मिळाले आहे असे गृहीत धरा. आणि ते पूर्वी कधीतरी, कोणत्या प्रकारे मिळाले ते आठवा.

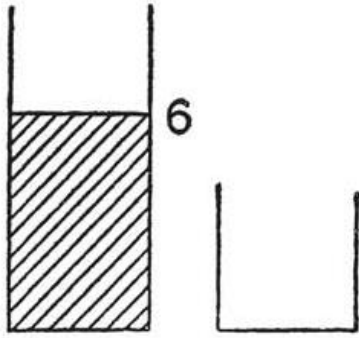
हा सर्व विचार इतका मुद्देसूद (explicitly) आपण करत नाही. आपण बघितलेल्या सर्वसाधारण आराखड्याचा विचार करू या. आपण प्रश्न सोडवण्याच्या पद्धतींचा अनुभव, अनुमान इ.च्या आधारे, विशिष्ट पायऱ्यांच्या आधारे अभ्यास करत आहोत. अधिक स्पष्टता

आणायचा प्रयत्न आपण करणार आहोत. परत एकदा त्या पायऱ्या मांडू. आणि मग परत कोड्याच्या सोडवणुकीकडे वळू.

प्रश्न समजून घेणे.

माहिती : काय माहित आहे? त्यातील घटक कोणते? त्यांचा 'आपल्याला जे हवे' त्यांच्याशी संबंध काय?

माहितीच्या घटकांचे म्हणणे काय आहे. घटक नेमके काय सुचवतात? अर्थात



आकृती २

९ लिटरच्या भांड्याला ६ लिटर
ची खूण असल्यावरची स्थिती

आपल्याला जे हवे त्या संदर्भात. जे हवे आहे ते मिळाले आहे असे जणू गृहीत धरून.

अट काय आहे? थेट माहितीवरून कोड्यात हवे आहे ते मिळते? अर्थातच तसे नाही. मग त्यासाठी कोणती अट आहे. अधिकचे काही बंधन आहे का?

आपल्या कोड्यासंदर्भात,

काय हवे आहे : ६ लिटर पाणी

माहिती / साधन : ९ लिटर, ४ लिटर चे भांडे. नदीतून पाणी घ्यायचे आहे. कितीही पाणी घेऊ शकतो. अर्थात ओतूनही देऊ शकतो.

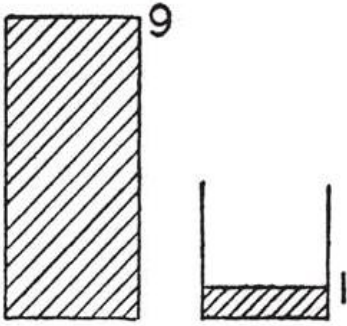
अट / अडचण : भांड्यांवर लिटरच्या खुणा नाहीत.

परत विचार करू.

६ लिटर पाणी मिळाले आहे. जणू काही पूर्वी ते असे खुणा असलेल्या भांड्यांतून मिळाले. काही करून ९ लिटरच्या भांड्यात आपल्याला एक अदृश्य खूण हवी. आता एक निश्चित दिशा मिळाली आहे. ९ लिटरच्या भांड्यात ६ लिटरचे पाणी असेल. आणि '६ लिटरची खूण' आपण तयार करायची आहे. प्रश्न सोडवायची दिशा, एक योजना डोळ्यासमोर आली.

आता अधिक विश्लेषण न करता कोडे सोडवू. आकृत्या बघून, आवश्यक तितकेच शब्दात मांडून.

म्हणजे ९ लिटरच्या भांड्यामध्ये ३ लिटर पाणी नाही. ३ लिटर भाग रिकामा आहे. ३



आकृती ३

४ लिटरच्या भांड्याने ३ लिटर मोजता येईल का?

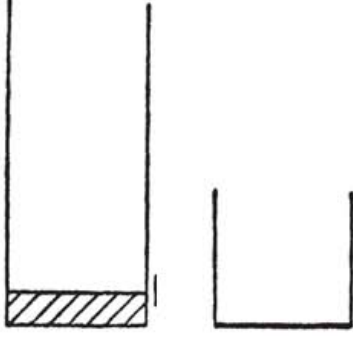
लिटरचे दोन भाग पाण्याने भरलेले आहेत, एक रिकामा आहे. आपल्याला तीन लिटर पाणी मोजता आले तर मग ६ लिटर पाणी मिळेल. तीन तीन लिटर मोजून ६ लिटर करायचे. अथवा थेट ९ लिटरच्या भांड्यात ३ लिटर वेगळे काढत आले तर तसे ही उत्तर मिळेल. ही महत्त्वाची पायरी आहे, ६ लिटर पाणी

हवे, ६ लिटर पाणी हवे असा धोशा थांबवून, ६ लिटर पाणी मिळण्यासाठी कोणती स्थिती मिळायला हवी, हा विचार सुरू झाला.

मग ४ लिटरचे भांडे मी ३ लिटर मोजता येईल असे केले, असे समजू. म्हणजे ४ लिटरमध्ये एक लिटर कमी आहे, असे करायचे आहे. किंवा ४ लिटरच्या भांड्यात खालती

एक लिटर पाणी आहे आणि फक्त ३ लिटर पाणी ४ लिटरच्या भांड्यात बसू शकेल. अर्थात ४ लिटरच्या भांड्यात मी ३ लिटर पाणी मोजीन, असे करायचे आहे.

४ लिटर भांड्यातले १ लिटर पाणी ९ लिटरच्या भांड्यातून मिळणार. ९ लिटरमधून

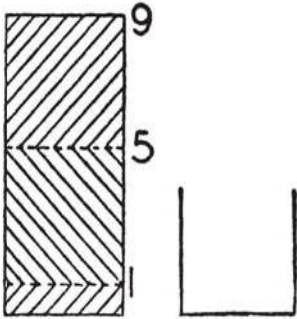


आकृती ४

९ लिटरच्या भांड्यातून १ लिटर पाणी मिळवले

४ लिटर काढले. टाकून दिले. मग अजून एकदा ४ लिटर काढले फेकून दिले. आणि आपण उत्तराच्यासाठी उपयुक्त परिस्थितीत आलो. आपल्याला जे हवे आहे ते कसे मिळू शकेल या विचारातील, अपेक्षित शेवटच्या उत्तराच्या जवळच्या स्थितीवर आपण आलो. येथून आपण ६ लिटर पाणी मिळवू शकू.

एक लिटर पाणी ४ लिटरच्या भांड्यामध्ये ओतले. ४ लिटरच्या भांड्यात आता ३



आकृती ५

९ लिटरच्या भांड्यातील वरचे ३ लिटर पाणी ४ लिटरच्या भांड्यात ओतले की ६ लिटर पाणी उरले.

लिटर जागा शिल्लक आहे. ९ लिटरचे भांडे भरून घेतले. त्यातील पाणी ४ लिटरचे भांडे भरेपर्यंत ओतले. आता ९ लिटरच्या भांड्यात बरोबर ६ लिटर पाणी शिल्लक राहिले.

आपण एक योजना बनवली ती योग्य आहे असे आपल्याला वाटते आहे, कारण दिलेली माहिती ते अपेक्षित माहिती या प्रवासाचे निश्चित स्वरूप

आपल्यासमोर आहे. प्रत्यक्ष कोड्याचे उत्तर लिहिताना, देताना आपण प्रश्नात दिलेल्या

माहिती आधारे आणि अटींसह सुरवात करून आपल्या विचाराने ठरवलेल्या पायऱ्यांनी मागे मागे जात टप्प्याटप्प्याने उत्तर मांडतो. ही उत्तर काढायची पद्धत म्हणजेच **आधी कळस मग पाया रे!**

अर्थात आपण या वेळी जे उत्तर अपेक्षित आहे त्यावर अधिक विचार केला. ते मिळाले आहे असे गृहीत धरले. तिथे कसे पोचता येईल, कोणत्या स्थितीतून उत्तराच्या स्थितीला आपण येऊ शकतो, ते शोधले. आता या पायरीवर कोणत्या स्थितीतून येऊ शकू, असा विचार करत आपण एक एक पायरीने 'दिलेल्या माहिती' जवळ आलो. अर्थात 'अपेक्षित उत्तर' संबंधीच्या माहितीचे विश्लेषण करत आपण आपली योजना तयार केली. 'दिलेल्या माहितीचे' विश्लेषण त्याद्वारे योजना आणि उत्तर; तसेच 'आधी कळस मग पाया' या दोन्ही मार्गांची तोंड ओळख आपण करून घेतली आहे.

योजना कशी बनवावी? ती अयशस्वी होईल का हे अगोदर तपासता येते का? या पुढील लेखात आपण यांचा विचार करणार आहोत.

क्रमशः

§§§

लेखक : **किरण बर्वे**, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान येथे गणित शिकवतात. विज्ञान व गणित विषयांत लेखन करतात. शैक्षणिक संदर्भ गटात सहभागी.

इ.मेल : barvekh@gmail.com

(कळीचे शब्द: गणित समजावून घेणे, दिलेल्या माहितीचे विश्लेषण, गणित सोडविण्याच्या पायऱ्या)

शैक्षणिक संदर्भ द्वैमासिकाविषयी

शैक्षणिक संदर्भ हे पालकनीती परिवाराचे द्वैमासिक ऑगस्ट १९९९ पासून संदर्भ सोसायटी प्रकाशित करत आहे. मराठीतून चांगले विज्ञान वाचायला मिळावे, शालेय व महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांच्या कुतूहलाला प्रोत्साहन मिळावे, अनुभवांना जोडून असलेल्या विज्ञानाची सहज ओळख व्हावी आणि समाजात वैज्ञानिक दृष्टिकोन वाढावा, हे याचे उद्देश आहेत.

२०१८ सालापासून आम्ही शैक्षणिक संदर्भची छापील आवृत्ती न काढता इ-अंक प्रकाशित करत आहोत व इमेल आणि व्हॉट्सॅपच्या माध्यमातून वाचकांपर्यंत पोहोचवत आहोत.

आपल्याला आमचे अंक वाचायचे असल्यास आपला इ-मेल पत्ता आणि व्हॉट्सॅप क्रमांक(ऐच्छिक) आम्हाला sandarbh.marathi@gmail.comवर पाठवावा. दर आठवड्याला एक लेख व दर दोन महिने पूर्ण झाल्यावर आठ लेखांचा एकत्रित एक अंक असे आपल्याला पीडीएफ स्वरूपात मिळतील.

www.sandarbhsociety.org या वेबसाईटला जरूर भेट द्या. जुने अंकही त्यावर पीडीएफ स्वरूपात उपलब्ध आहेत.

हा उपक्रम विनामूल्य आहे, पण आपण आपला सहभाग ऐच्छिक देणगी रूपात संदर्भ सोसायटीकडे पाठवू शकता. अधिक माहिती वेबसाईटवर उपलब्ध आहे.

- संपादक मंडळ, शैक्षणिक संदर्भ व विश्वस्त मंडळ, संदर्भ सोसायटी