

शैक्षणिक संदर्भ अंक १३७ ऑगस्ट - सप्टेंबर २०२२

Sin 90 = 1 का?

(भाग - २)

लेखक : प्रा. मनोहर राईलकर

Sin 90 = 1 का?

(भाग - २)

लेखक : प्रा. मनोहर राईलकर



गेल्या लेखात आपण $\sin 90 = 1$ का याचे उत्तर काटकोन त्रिकोणाच्या बाबतीत शिकलो.
विशालकोनाचेही तसेच असते का? एखाद्या गणिताचा वेगळ्या तऱ्हेनेही विचार करता येईल का?

प्राध्यापक : या मुलांनो. यावेळेला काय शंका आणली आहे?

शेखर : सर, तुम्ही विशालकोनाच्या Sine करता काय करायचं ते सांगणार ना आज?

प्राध्यापक : तर ! आता अगदी लहानपणी तुम्ही संख्या शिकलात तेव्हा तुम्हाला कुणी
नैसर्गिक संख्या असा शब्द वापरून संख्या सांगितल्या नव्हत्या.

मोहिनी : नाही सर, वरच्या वर्गात गेल्यावर अपूर्णाक, मग ऋण संख्या आणि आता अपरिमेय संख्या असे नवनवीन अर्थ संख्या ह्या शब्दाला का देतात, ते कळलं.

प्राध्यापक : बरोबर. तसंच कोनाचं आहे. सहासात वर्षांच्या, पहिली दुसरीतल्या मुलाला कोन म्हणजे काय, असं विचारलं, तर तो भिंतीचा कोपरा, पाटीचा कोपरा, वहीचा कोपरा, असं काही तरी दाखवील. कारण तोवर त्याच्या मनातील कोनाची कल्पना, तिथपर्यंतच पोचलेली असेल. पण, तुमची कल्पना त्याच्या थोडीशी पुढं गेली आहे. तरीही अजून ती परिपूर्ण झालेली नाही. म्हणूनच काटकोनाचा किंवा विशाल कोनाचा Sine कसा काढता येईल, असा प्रश्न तुम्हाला पडला आहे. म्हणूनच गेल्यावेळी मी बनवाबनवी केली असं रेखाला वाटलं.

रेखा : माझं चुकलं सर.

प्राध्यापक : तुझं मुळीच चुकलं नाही. गणितात तर नेहमीच अशी संशयी वृत्ती हवी. पटलं नाही तर मान्य करायचं नाही. अगदी शिक्षकांच्या म्हणण्यावर सुद्धा आक्षेप घेण्यात त्यांचा अपमान होत नसतो.

ते असू दे. काटकोनाचा Sine असा का हे त्या उपकरणाच्या मदतीनं पाहिलं. पण त्या मार्गानं विशाल कोनापर्यंत जाता आलं नाही. निदान तुमचं खरंखुरं पूर्ण समाधान होईल इथपर्यंत जाता आलं नाही. कारण आपण $\text{Sine } A = \sin (180 - A)$ का? ह्याचं चांगलं स्पष्टीकरण मागच्या वेळी दिलं नव्हतं. आज देता येईल.

मंदार : त्या करता काय करायला हवं?

प्राध्यापक : त्या करता आता आपल्याला कोनाचीच व्याख्या बदलायला हवी. मात्र, अगदी काटेकोर व्याख्या तुमच्या कक्षेत येणार नाही. म्हणून आपण विज्ञानाचा आधार घेऊ.

सुशांत : मी सुशांत. सर, कोनाची व्याख्या कशी बदलता येईल?

प्राध्यापक : खरं तर बदलणं हा माझा शब्द योग्य नाही. कोनाच्या व्याखेचा विस्तार असं म्हणू. संख्याकल्पनेचा विस्तार केला की नाही? तसंच. असो. तर, तुम्हाला घर्षण माहित असेल. आणि हेही माहित असेल की, शेतकऱ्याचा पोरगा खांबाला दोरखंडाचं वेटोळं घालतो, आणि त्याच्या मदतीनं माजलेल्या बैलालासुद्धा ओढून धरू शकतो. किंवा एकटा खलाशी काही लक्ष टनांचं जहाज धरू शकतो. कसं?

रेखा : घर्षणामुळं.

प्राध्यापक : ठीक. आता पुढचा प्रश्न. वेढे वाढले तर घर्षण कमी होईल की जास्त?

रेखा : अर्थातच जास्त.

प्राध्यापक : बरोबर जास्त वेढे तर जास्त घर्षण. आणि जास्त वेढे देण्याकरता मुलाला त्या खांबाला जास्त प्रदक्षिणा घालाव्या लागतील की नाही?

मुलं : होय सर.

प्राध्यापक : म्हणजेच जास्त कोनातून फिरावं लागेल की नाही?

मुलं : होय सर.

प्राध्यापक : म्हणजे तुम्ही कोनाचा काही तरी वेगळा अर्थ लावलात की नाही?

मुलं : होय सर.

प्राध्यापक : काय लावलात?

मंदार : खांबाभोवती आपण किती फिरलो त्यावरून ठरवलं.

प्राध्यापक : बरोबर. त्याच दृष्टीनं आता आपण कोनाच्या कल्पनेचा विस्तार करू. आणि अशा कोनांकरता त्रिकोणमितीही कशी बदलते, तेही पाहू.

साधना : म्हणजे आतापर्यंत आपण शिकलेली आपली सगळी त्रिकोणमिती फुकटच का?

प्राध्यापक : फुकट कशी? तुम्ही ऋण संख्या शिकलात तेव्हा नैसर्गिक संख्यांचं ज्ञान फुकट गेलं का? म्हणून तिचा विस्तार करायचा. तेच सांगतोय. मात्र तिथं एक काळजी घेणं जरूर आहे. कोनाचा किंवा त्रिकोणमितीचा विस्तार करताना मुळात आपल्याजवळ जे होतं ते फुकट घालवायचं नाही. नाही तर साधनाला वाटतं तसं आतापर्यंतचं ज्ञान फुकट जाईल.

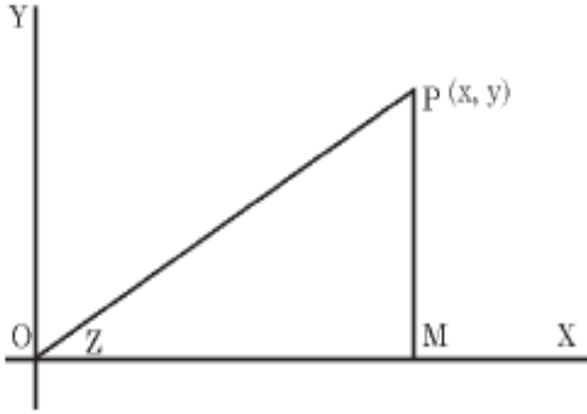
तर, त्यांचा मूलभूत अर्थ तोच राहिला पाहिजे म्हणजे नव्वद किंवा मोठ्या कोनांच्या त्रिकोणमिती गुणोत्तरांकरता कोनाची नवी व्याख्या दिली तरीसुद्धा लघुकोनांच्या गुणोत्तरांचा, त्या नव्या व्याख्येमुळं मिळणारा अर्थ आणि आधीचा अर्थ यांत फरक नसावा. तर आपण व्याखेचा विस्तार केला असं म्हणणं योग्य ठरेल.

समजा कोनाची नवीन व्याख्या दिली. आणि त्याचा Sine म्हणजे काय तेही ठरवलं. तर नव्या व्याख्येप्रमाणं मिळणारा लघुकोनाचा Sine आणि त्याचाच पूर्वीचा Sine म्हणजे समोरील बाजू भागिले कर्ण, यांची उत्तरं सारखी यायला पाहिजेत. तरच कोनाची

मूळची कल्पना आणि त्याची गुणोत्तरं ह्यांचा आपण विस्तार केला असं म्हणता येईल. नाही तर मग आधीचं फुकट जाईल. कळलं?

शेखर : ते कसं करता येईल?

प्राध्यापक : आपण आकृती काढू. तुम्हाला निर्देशक भूमिती माहित आहे ना? (सगळे होय म्हणतात.) परस्परांस लंब अशा दोन रेषा घेतात. आडव्या रेषेला X - अक्ष म्हणतात. आणि उभ्या रेषेला Y - अक्ष म्हणतात. छेदन बिंदूला आरंभबिंदू (O) म्हणतात.



बाकीचं तुम्हाला माहित असल्यामुळं अधिक चर्चा करित नाही. आता O मधून जाणारा असा, समजा r लांबीचा, एक रेषाखंड OP काढला. त्याच्या दुसऱ्या टोकाला P म्हणू. आता मुळात हा

रेषाखंड X - अक्षाशी, लांबीचा विचार सोडला तर, XO शी एकरूप होता असं समजू. मग तो घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेनं फिरू लागला आहे, असं समजू. तो जसजसा फिरेल तसतसे P चे सहगुणक बदलत जातील. आता मला सांगा, रेषाखंड मुळापासून किती फिरला की तो कोन आणि P चे निर्देशक यांच्यात एकास एक संबंध राहिल?

स्वाती : मी स्वाती. पण सर त्याची एक फेरी पूर्ण झाली की तो पुन्हा पहिल्याच जागी येईल आणि पुन्हा पुढं जाईल की. (प्रा. मान डोलवतात.) म्हणजे त्यांच्यांतला संबंध एकास एक कसा राहिल?

प्राध्यापक : नाहीच राहणार. पण तूर्त ते आपण बाजूस ठेवू. आणि फक्त एकाच फेरीला परवानगी देऊ. मग झालं? आता सांगा, की रेषाखंड OP कितीपासून कितीपर्यंत कोनातून फिरू शकेल?

सुशांत : ० ते ३६० अंशातून.

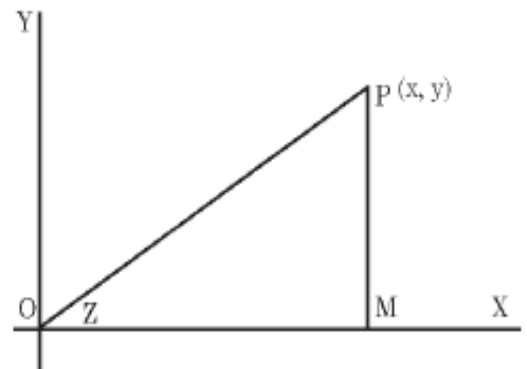
प्राध्यापक : आता P चे निर्देशक (x, y) मानू आणि कोनाला Z नाव देऊ. पुढं Z कोनाचा sine आणि cosine यांच्या व्याख्या $\cos z = x/r$, $\sin z = y/r$ ह्या प्रमाणं ठरवू. कळलं? आता असं पहा की कोन शून्य पासून ३६० पर्यंतच्या कोणत्याही किमती घेत असला तरी आपल्याला त्याची sine आणि cosine ही गुणोत्तरं मिळतील की नाही?

मुलं : होय सर, पण नव्या व्याख्येप्रमाणं. पण सर काही चरणांत निर्देशक ऋणसुद्धा असतील. त्याचं काय?

प्राध्यापक : असू देत. पण, ते नंतर पाहू. जेव्हा P पहिल्या चरणात असेल तेव्हा त्रिकोण OPD ह्या काटकोन त्रिकोणातून मिळणारी Z ची म्हणजेच OPX कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं तशीच,

$\sin z = y/r =$ समोरील बाजू / कर्ण आणि

$\cos z = x/r =$ शेजारील बाजू / कर्ण, अशी पूर्वीसारखीच मिळतील की नाही? इथं पुन्हा तीच आकृती दाखवतो.



मुलं : होय सर. आलं लक्षात. म्हणून विस्तार झाला असं म्हणायचं ना?

प्राध्यापक : होय आणखी एक मुद्दा. कोन शून्यपासून ३६० पर्यंत काहीही असला तरी, $x^2 + y^2 = r^2$ हे पूर्वीचं नित्य समीकरण सदैव सत्य असल्यामुळं r^2 नं भागल्यास, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ हे सूत्र आपल्याला कोणत्याही कोनाकरता मिळतं.

स्वाती : पण सर, यावरून विशालकोन त्रिकोणाकरता क्षेत्रफळाचं सूत्र तेच राहतं हे कुठं आपण दाखवलं आहे?

प्राध्यापक : दाखवू ना ते आता. खरं तर आपण $\sin(180 - A) = \sin A$ इतकं दाखवलं तरी चालेल. कारण मागच्या वेळी आपण तशीच व्याख्या केली होती. म्हणून, ती तशी का, ते दाखवलं तरी पुरेल. त्यापूर्वी तुम्ही आतापर्यंत न विचारलेला एक प्रश्न $\sin 0 = 0$ हेही पाह्यचं आहे ना?

मुलं : होय सर.

प्राध्यापक : पण, तुम्ही कुठं 'का?' असं विचारलंत (मुलं गप्प राहतात.) हरकत नाही. आता तुम्हाला कळेल. कोन $\text{POX} = 0$ समजा. मग कुठं असेल?

मुलं : x अक्षावर.

प्राध्यापक : मग त्याचे निर्देशक काय?

मुलं : $x = r$ आणि $y = 0$ असे असतील. आलं लक्षात. म्हणून आता $\sin 0 = y/r$ आणि $\cos 0 = 1$. आलं सारं लक्षात.

प्राध्यापक : तसंच $\sin 90$ चंही सांगता येईल. त्यावेळचे P चे निर्देशक सांगा.

साधना : $x = 0$ आणि $y = r$. आलं लक्षात.

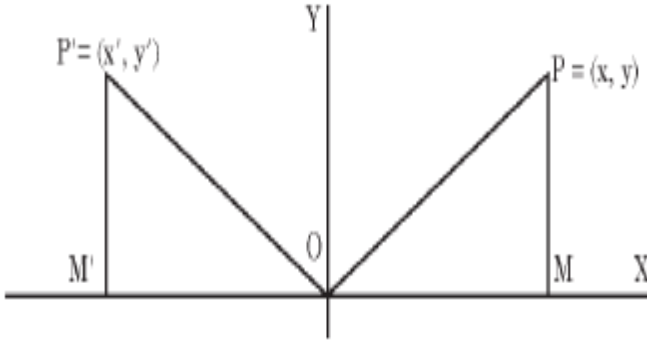
$$\sin 90 = r/r = 1$$

प्राध्यापक : आपण विशालकोन त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ, म्हणजे सूत्र काढू.

स्वाती : मी आकृती काढते.

प्राध्यापक : थांब जरा. मी वेगळीच आकृती काढतो ती पहा. $\angle POM = \angle P'OM'$

घेऊ. मग सांगा $\angle P'OM'$ आणि विशालकोन $\angle P'OM$ हे पूरक कोन आहेत की नाही?



स्वाती : होय सर, $\angle P'OM$,
 $\angle P'OM'$ पूरक आहेत. शिवाय
आणखी $\angle POM = \angle P'OM'$
घेतलंच आहे.

प्राध्यापक : जर $\angle P'OM = z$ मानलं तर $\angle P'OM'$ किती?

मंदार : $180 - z$

साधना : सर माझ्या मनात एक कल्पना आहे. पण मला ते सिद्ध करता यायचं नाही. (पुढं बोल, अशी खूण प्रा. करतात.) आपल्या नव्या व्याख्येप्रमाणं एखादा कोन आणि त्याचा पूरक कोन याचं Sine गुणोत्तर समान येईल का?

प्राध्यापक : अग आपल्याला तेच हवंय ना? बरं P, P' ह्या दोन बिंदूच्या निर्देशकांत काय संबंध आहे, ते सांगू शकाल का?

स्वाती : मी सांगते सर. $x' = -x$ (minus x), पण $y' = y$

प्राध्यापक : मग...

साधना : आता आलं लक्षात. $y' = y$ असल्यामुळच दोघांची गुणोत्तरं Sine सारखी येतात.

प्राध्यापक : शाबास साधना ! अगदी बरोबर ओळखलंस. पण रेखा, आपण काहीही व्याख्या केली नाही, हे कळलं का?

रेखा : होय सर. P, P' यांचे y - निर्देशक सारखे आहेत म्हणून येतं ना?

प्राध्यापक : बरोबर. आणखी एक. आपल्या नव्या व्याख्येनुसार त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं नेहमी धनच असतील असं नव्हे. मगाशी तुम्ही कुणीतरी म्हटलंच. त्यामुळं फक्त लघुकोनांची गुणोत्तरं विचारात घेतली तर ती दोन्ही प्रकारांत सारखी येतील आणि तशी यायला हवीतच ना? कारण आपण आपल्या कल्पनेचा विस्तार करू पहात आहोत की नाही? आता $\cos 0$ झालं, $\cos 90$ सांगा.

स्वाती : $\cos 90 = 0$

प्राध्यापक : बरोबर. कळलं ना सगळं?

शेखर : कळलं सर. हे स्पष्टीकरण मागच्या पेक्षा अधिक चांगलं आहे. पण, सर ऋण गुणोत्तराचं उदाहरण सांगता?

प्राध्यापक : ती तुम्ही सुद्धा सांगू शकाल.

कारण आपली त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं P च्या निर्देशकांवर अवलंबून असतात आणि कोणत्या चरणात कोणते निर्देशक धन किंवा ऋण असतात, ते तुम्हाला माहीतच आहे. सांगा पाहू.

सुशांत : पहिल्या चरणात दोन्ही धन. दुसऱ्या चरणात x ऋण आणि y धन. तिसऱ्या चरणात दोन्ही ऋण आणि चौथ्या चरणात y ऋण पण x धन.

प्राध्यापक : यानुसार sin आणि cos गुणोत्तरांची चिन्हं ठरवतील. आणि आता दुसऱ्या चरणात y धन असल्यामुळं sin गुणोत्तर धन आलं. त्यामुळं तर आपलं सूत्र सिद्ध झालं.

मंदार : कोणतं सर?

शेखर : अरे असं काय करतोस? $\sin(180 - A) = \sin A$ हे नाही का आपण दाखवतो आहोत? आणखी काय सर?

प्राध्यापक : आणखी खूपच आहे. एकच सांगतो. मगाशी स्वातीनं म्हटलं की संगती एकास एक नाही. पण ज्या दोन कोनांतलं अंतर ३६० किंवा त्याच्या धन वा ऋण कोणत्याही पूर्ण पटीत असेल त्यांच्यात फरक करायचा नाही असं ठरवलं, की कोणत्याही कोनाची म्हणजे ऋण कोनांचीसुद्धा गुणोत्तरं मिळतील की नाही? हे मान्य केलं तर ३०, ३३०, ६९० ह्यांच्यातही फरक रहात नाही. घड्याळात, १३ आणि १, १४ आणि २ यांच्यात आपण कुठं फरक करतो? म्हणजे ऋण कोनांचीसुद्धा गुणोत्तरं मिळतील की नाही? खरं तर वाटेल त्या कोनांची गुणोत्तरं मिळतील. जसे घड्याळात ऋण वाजत नाहीत तसे व्यवहारातही ऋण कोन येत नाहीत. पण गणितात येऊ शकतात. पण विस्तार म्हणजे काय कळलं ना?

मुलं : कळलं सर, चांगलंच कळलं. पण आम्ही नेहमी अशा शंका विचारायला आलं तर चालेल का?

प्राध्यापक : अवश्य. शंका विचारण्याचा तर तुमचा हक्कच आहे. आणि मला तर मुलांनी शंका विचारलेल्या आवडतातच.

पूर्वप्रसिद्धी : शैक्षणिक संदर्भ अंक ५५ डिसेंबर २००८ - जानेवारी २००९.

§§§

लेखक : मनोहर राईलकर, गणिताचे प्राध्यापक होते. गणित विषयावर अनेक पुस्तके प्रसिद्ध, अतिशय रंजक पद्धतीने गणित शिकवत असत.

(कळीचे शब्द : त्रिकोणमिती, लघुकोन व विशालकोन असलेल्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढण्याची सूत्रे, निर्देशक भूमिती, कोनाची व्याख्या, ऋण कोनांची गुणोत्तरे)

शैक्षणिक संदर्भ द्वैमासिकाविषयी

शैक्षणिक संदर्भ हे पालकनीती परिवाराचे द्वैमासिक ऑगस्ट १९९९ पासून संदर्भ सोसायटी प्रकाशित करत आहे. मराठीतून चांगले विज्ञान वाचायला मिळावे, शालेय व महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांच्या कुतूहलाला प्रोत्साहन मिळावे, अनुभवांना जोडून असलेल्या विज्ञानाची सहज ओळख व्हावी आणि समाजात वैज्ञानिक दृष्टिकोन वाढावा, हे याचे उद्देश आहेत.

२०१८ सालापासून आम्ही शैक्षणिक संदर्भची छापील आवृत्ती न काढता इ-अंक प्रकाशित करत आहोत व इमेल आणि व्हॉट्सॅपच्या माध्यमातून वाचकांपर्यंत पोहोचवत आहोत.

आपल्याला आमचे अंक वाचायचे असल्यास आपला इ-मेल पत्ता आणि व्हॉट्सॅप क्रमांक (ऐच्छिक) आम्हाला sandarbh.marathi@gmail.com वर पाठवावा. दर आठवड्याला एक लेख व दर दोन महिने पूर्ण झाल्यावर आठ लेखांचा एकत्रित एक अंक असे आपल्याला पीडीएफ स्वरूपात मिळतील.

www.sandarbhsociety.org या वेबसाईटला जरूर भेट द्या. जुने अंकही त्यावर पीडीएफ स्वरूपात उपलब्ध आहेत.

हा उपक्रम विनामूल्य आहे, पण आपण आपला सहभाग ऐच्छिक देणगी रूपात संदर्भ सोसायटीकडे पाठवू शकता. अधिक माहिती वेबसाइटवर उपलब्ध आहे.

- संपादक मंडळ, शैक्षणिक संदर्भ व विश्वस्त मंडळ, संदर्भ सोसायटी