

शैक्षणिक संदर्भ अंक १३७ ऑगस्ट - सप्टेंबर २०२२

Sin 90 = 1 का?

(भाग - १)

लेखक : प्रा. मनोहर राईलकर

Sin 90 = 1 का?

(भाग - १)

लेखक : प्रा. मनोहर राईलकर

गणिताचे प्राध्यापक मनोहर राईलकर यांचे दिनांक ३१ ऑगस्ट २०२२ रोजी वयाच्या ९३व्या वर्षी वृद्धापकाळाने दुःखद निधन झाले. शैक्षणिक संदर्भशी त्यांचा अनेक वर्षे स्नेह होता आणि गणितातील विविध संकल्पनांवर त्यांनी आपल्या अंकामध्ये लेखन केलेले आहे. त्यांच्या स्मृतीस संदर्भ परिवारातर्फे अभिवादन. सरांना आदरांजली म्हणून शैक्षणिक संदर्भच्या ५४ व ५५व्या अंकांत दोन भागांत प्रसिद्ध झालेला त्यांचा हा लेख पुनर्प्रकाशित करित आहोत.

ह्या लेखाचं शीर्षक म्हणजे मुळात विद्यार्थ्यांचीच शंका आहे. पण, तीच शंका काही शिक्षकांनीसुद्धा विचारल्यानं त्यावर स्वतंत्र लेख लिहावेत, असा विचार केला. तुमच्यापैकी अनेकांच्या मनातही ही

शंका उद्भवली असेलच ना?

शिक्षक : सर, येऊ का?

प्राध्यापक : वा ! येऊ का म्हणजे काय, या ना ! बरोबर हे सैन्य कुठलं?

शिक्षक : अहो आमच्या शाळेतली मुलं आहेत सगळी. त्यांना एक शंका आहे आणि मला काही तिचं निरसन करता आलं नाही, म्हणून तुमच्याकडे आणलंय. बरं का रे मुलांनो, अगदी बिनधास्त शंका विचारा सरांना. पहिल्या वेळी आधी आपले नाव सांगत जा.

प्राध्यापक : बोला, काय शंका आहे? आणि तुमचे सर म्हणाले त्याप्रमाणं अगदी न घाबरता शंका विचारा.

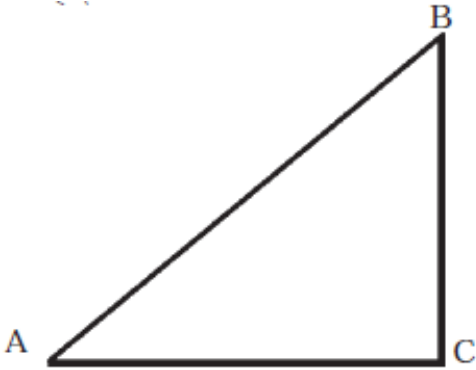
साधना : माझं नाव साधना. शंका अशी. आमच्या दुसऱ्या सरांनी त्रिकोणमिती वापरून त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाकरता एक सूत्र शिकवलं. $\frac{1}{2}(bc\sin A)$ असं. हेच सूत्र काटकोन त्रिकोणाकरताही चालतं असं त्यांनी म्हटलं. फक्त, $\sin 90 = 1$ घ्यायचं इतकंच म्हटलं आहे. पण त्याचं कारण सांगितलं नाही त्यांनी.

शेखर : मी शेखर. पण सर उत्तर मात्र बरोबर येतं. पण मग $\sin 90 = 1$ असं म्हणणं बरोबर आहे का?

साधना : त्रिकोणमितीची गुणोत्तरं तर फक्त लघुकोनांकरताच शिकवली आहेत आम्हाला.

शेखर : थांब ग साधना, सर, मी आधी आकृती काढतो.

प्राध्यापक : काढ ना. आकृती तर हवीच. त्याशिवाय समजूत चांगली कशी होईल?



शेखर : ABC असा त्रिकोण घेतला $C = 90$. मग प्रथम $\sin A = a/c$ अशी व्याख्या आम्हाला शिकवली, म्हणजे समोरील बाजू भागिले कर्ण. पण मला एक समजत नाही, $C = 90$ घेतल्यानंतर पुन्हा $A = 90$, कसा असू शकेल? एकाच

त्रिकोणात दोन काटकोन असूच शकत नाहीत.

प्राध्यापक : एकदम बरोबर. एका त्रिकोणात दोन काटकोन असूच शकत नाहीत, हा तुमचा आक्षेप अगदी बरोबर आहे.

शशिकांत : मी शशिकांत. पण सर आपण क्षेत्रफळाची जर $\frac{1}{2} (bc\sin A)$ ही व्याख्या घेतली आणि निराळी आकृती काढली तर...

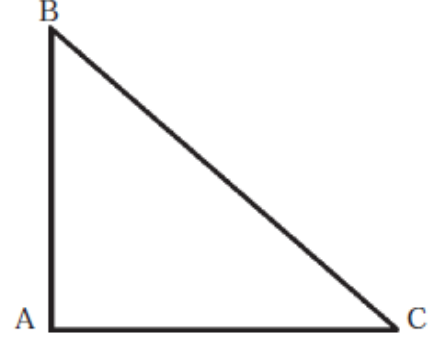
प्राध्यापक : बोल ना. आकृतीच काढ.

रेखा : मी रेखा. मी काढू का? (प्रा. मानेनं होकार देतात.) $A = 90$ घेतलं. मग $\sin 90 = 1$

मानलं की उत्तर बरोबर मिळतं. कारण, AB, AC ला लंब असल्यामुळे उत्तर बरोबर येतं. हे मला मान्य आहे.

पण सूत्र कसे वापरता येईल, ते मात्र कळत नाही.

कारण एकदा $C = 90$ घेतल्यावर...



प्राध्यापक : हा मुद्दा मगाशी शेखरनं मांडला आहे. पण, तुमची शंका आणि आक्षेप दोन्ही बरोबर आहेत. असं का मानायचं ह्याची दोन स्पष्टीकरणं मी तुम्हाला देईन. आज फक्त एक. दुसरं नंतर देईन.

प्रबोध : मी प्रबोध. पण, सर हेच सूत्र विशालकोनाकरता वापरता येईल का?

साधना : अरे वेडाबिडा आहेस का तू? काटकोन त्रिकोणाचा दुसरा कोन कधी विशाल असू शकेल का?

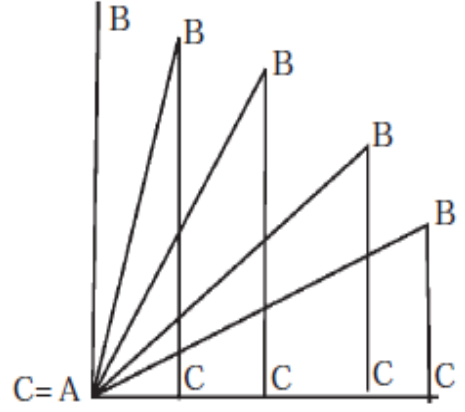
प्राध्यापक : थांब साधना जरा. काटकोन त्रिकोणाचा कोणताच कोन विशाल असणार नाही, हे तुझं म्हणणं बरोबर आहे. पण प्रबोध म्हणतोय तेही चुकीचं नाही बरं का मुलांनो.

सर्व : सर ! तुम्ही? तुम्ही असं म्हणता?

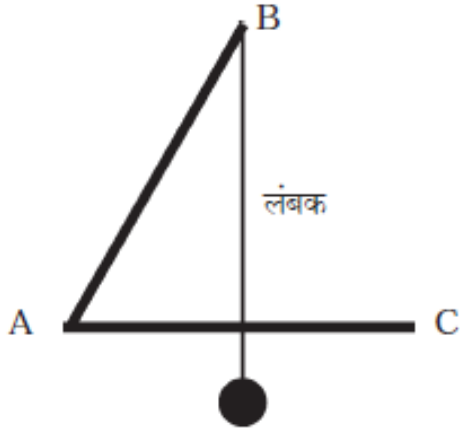
प्राध्यापक : सगळं काही नीट सांगतो ना समजावून. खरं तर त्याकरता एक प्रयोगच करायला हवा. प्रयत्न करतो समजावून सांगायचा. ही आकृती पहा.

अदिती : मी अदिती. सर हे काय केलंयत? एकेक अक्षर किती वेळा वापरलं आहे तुम्ही?

प्राध्यापक : जरा धीर धर. मी एकच अक्षर नाही वापरलं. तर एकाच रेषेच्या विविध अवस्था दाखवल्या आहेत. आणि अक्षरांच्या त्या त्या वेळच्या विविध जागा दाखवल्या आहेत. खरं तर हे सारं नीट चांगलं समजावून सांगण्याकरता मला एक साधन



सुचतंय. चला त्याचंही चित्र काढूया. AB आणि AC अशा दोन पट्ट्या घ्यायच्या आणि



त्या A पाशी फिरू शकतील अशा रीतीनं एकमेकींना अडकवायच्या. B पाशी एक खिळा मारून त्याला एक लंबक अडकवायचा. मग तुम्ही AC ही पट्टी आडवी ठेवून A भोवती AB जसजशी फिरवू लागाल, तसतशी वेगवेगळ्या स्थितीत ती आता पहिल्या

आकृतीप्रमाणं दिसू लागेल की नाही?

मंदार : मी मंदार. आता आलं लक्षात. म्हणजे तुम्ही A पासचा कोन हळूहळू वाढवीत नेणार.

प्राध्यापक : बरोबर. तुम्हाला सगळ्यांना कळलं ना मंदारचं म्हणणं? आता सांगा, जसजशी AB ही पट्टी उभ्या रेषेकडे येऊ लागेल, किंवा उभी होऊ लागेल म्हणा, तसतसा A कोन किती होऊ लागेल?

साधना : ९० अंशाचा होईल असं म्हणायचंय का तुम्हाला?

प्राध्यापक : शाबास साधना. तुम्हा सर्वांच्या लक्षात आलं का? खरं तर असं साधं उपकरण तुम्ही स्वतः केलंत, तर तुम्हाला चांगलं कळेल. आता आणखी एक प्रश्न. $\sin A = \frac{CB}{AB}$ = समोरील बाजू भागिले कर्ण, असं मगाशी शेखरनं म्हटलंच होतं, नाही का? मग पट्टी जसजशी उभी होऊ लागेल, तसतशी CB ची लांबी AB इतकी होऊ लागेल की नाही? आणि $C = A$ होईल की नाही?

मंदार : होय सर.

प्राध्यापक : मग $\frac{CB}{AB}$ ह्या गुणांतराचं काय होईल?

साधना : आलं लक्षात सर. त्याची किंमत जवळ जवळ १ होईल.

प्राध्यापक : बरोबर. म्हणजेच कोन जसजसा ९०च्या जवळ जवळ येऊ लागेल तसतशी त्याच्या Sin ची किंमत १च्या जवळ येईल म्हणूनच गणितज्ञांनी $\sin 90 = 1$ असं ठरवलं. लक्षात आलं का? अर्थात, हे स्पष्टीकरण तुम्हाला पटतंय की नाही, ते मला माहित नाही.

शेखर : अगदीच पटत नाही, असं नाही. पण नेमकं समाधान होत नाही.

प्राध्यापक : (हसतात) असंच पाहिजे. संपूर्ण समाधान होईतो, तुम्ही थांबताच कामा नये. मला आवडली तुमची वृत्ती.

रेखा : पण सर आमचं अगदी चांगलं समाधान होईल, असं स्पष्टीकरण देताच येणार नाही का?

प्राध्यापक : यायलाच हवं. नाही तर मग गणितात दोष राहतील नाही का? पण तूर्त ते बाजूला ठेवू आणि $\sin 90 = 1$ अशी व्याख्याच करू. फक्त ही व्याख्या अगदीच

कोणीतरी लहर म्हणून केली नाही, त्यामागं काही तरी सुसूत्र कारण आहे, हे तुमच्या लक्षात आलंय ना?

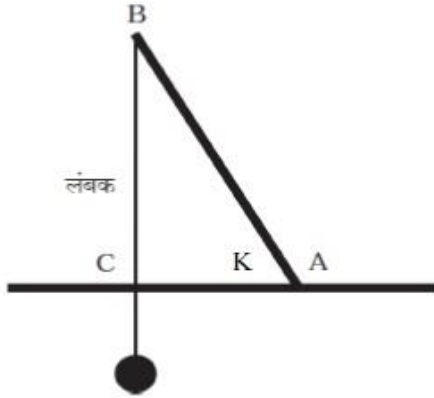
मुलं : होय सर, पण...

प्राध्यापक : तुमचं पूर्ण समाधान करण्याची जबाबदारी माझी. मग तर झालं? पण पुढच्या वेळी आता ह्याच उपकरणाच्या मदतीनं आपण विशालकोनाचासुद्धा विचार करू.

मंदार : म्हणजे सर विशालकोनाचाही विचार करता येईल ना? मला तेच वाटतं.

रेखा : जरा थांब रे. ह्या मंदारला धीर नाही मुळीच. पण, सर त्याकरता हे उपकरण नाही चालणार. पट्टी जरा लांब घ्यायला हवी.

प्राध्यापक : छान ! पण, सांग पाहू कशी ते.



रेखा : आकृती काढून दाखवते. ही बघा. बरोबर?

प्राध्यापक : फारच छान ! आता सांगा Aच्या शेजारच्या कोनाला आपण तूर्त K असं नाव दिलं तर त्याचं माप काय असेल?

शेखर : $180 - A$ ना?

प्राध्यापक : अगदी बरोबर. आता सांगा K कोन तर

लघु आहे की नाही?

मुलं : होय सर. म्हणजे त्याचा Sine काढता येईल ना?

प्राध्यापक : आणि तो किती येईल?

मोहिनी : मी मोहिनी. मी सांगू? $\sin K = CB / AB$ ना?

प्राध्यापक : बरोबर. मग ह्यावरून आपण $CB = AB \cdot \sin K$ असं लिहू शकतो ना? पण, पाया गुणिले उंची भागिले २ ह्या सूत्रानं ABC ह्या विशालकोन त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ $AC \cdot CB / 2$ असतं ना? (सर्व मुलं 'होय सर' म्हणतात.) मग आता सांगा त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ $AC \cdot AB \cdot \sin K / 2 = bc \sin K / 2$ हेच येतं की नाही?

मोहिनी : पण सर $\frac{1}{2} (bc \sin A)$ असं कुठं आलं?

प्राध्यापक : नाही ना आलं. ते येण्याकरता काय करायला हवं? K म्हणजे काय आहे?

शेखर : $K = 180 - A$ असंच ना?

प्राध्यापक : जर आता सूत्र पहिल्याप्रमाणंच असायला हवं तर त्यासाठी जर आपण विशालकोनाकरता...

मोहिनी : $\sin A = \sin (180 - A)$ अशीच व्याख्या केली तर?

प्राध्यापक : शाबास ! अशीच व्याख्या करायची. की मग त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचं हे सूत्र, सर्वच प्रकारच्या कोनांकरता चालेल की नाही?

रेखा : नाही सर, माझं नाही समाधान झालं. ही बनवाबनवी वाटते. आपल्याला सोयीची अशी काही व्याख्या केलेली गणितात चालते, असा ह्याचा अर्थ होतो.

प्राध्यापक : सोयीची हे तुझं म्हणणं बरोबर. पण काहीही हे म्हणणं चूक. आपली नवी व्याख्या आपल्या जुन्या सर्व व्यवस्थेशी सुसंगत असली पाहिजे. तशी सोयीस्कर व्याख्या करायला गणितात मुभा आहे. त्यासाठी तुम्हाला मी एक उदाहरण देतो $a^0 = 1$ असं तुम्ही मानता का नाही? (सर्व मुलं मान डोलवतात.) का? अशीच का करायची? दुसरी कुठली किंमत का घ्यायची नाही? सांगता?

मंदार : त्यानं आपलं काम होतं.

प्राध्यापक : अगदी बरोबर. पण, खरं तर त्या आधी एक प्रश्न विचारतो. A^n मधील n काय आहे?

मंदार : n नैसर्गिक संख्या आहे का?

प्राध्यापक : बरोबर. आता a^2 , a^3 म्हणजे काय ते सांगा.

शेखर : $a^2 = a.a$, $a^3 = a.a.a$ बरोबर?

प्राध्यापक : बरोबर. A^2 मध्ये a , 2 वेळा आणि a^3 मध्ये a , ३ वेळा कारण आणि २, ३ ह्या नैसर्गिक संख्या आहेत. पण a^0 करता ० वेळा असं म्हणता येत नाही. कारण, ० वेळा a असं म्हणण्याला काही अर्थच नाही. तरीही आपण $a^0 = 1$ अशी व्याख्या केली. का? ह्यात काही सोय आहे. की बनवाबनवी केलीय? तुला काय वाटतं मोहिनी?

मुलं : आम्हाला माहित नाही, तुम्हीच सांगा सर.

प्राध्यापक : घातांकांच्या गुणाकाराचा पहिला नियम काय आहे?

शेखर : मी सांगतो. $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ हाच ना?

प्राध्यापक : आता मला $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2}$ हे सिद्ध करून दाखवा.

शेखर : मी करतो. डावी बाजू $a^3 \cdot a^2 = (a.a.a).(a.a) = a.a.a.a.a = a^5$, असंच ना?

प्राध्यापक : अगदी बरोबर. हा नियम घातांक नैसर्गिक संख्यांकरता ठीक आहे. पण ह्यात एखादा घातांक ० घेतला तरी चालावं अशी अपेक्षा करून a^0 चा सोयीस्कर अर्थ लावला तर? वरच्या सिद्धतेत २ ऐवजी ० घाल पाहू आणि a^0 करता काय मानावं लागतं ते सांग पाहू.

शेखर : $a^3 \cdot a^0 = a^3$ आता आलं लक्षात $a^0 = 1$ असं का मानायचं ते.

प्राध्यापक : म्हणजे रेखा म्हणते तसं काहीही नव्हे. पण सोयीस्कर असल्यानं तसं ठरवलं आपण. काय सोय? $A^0 = 1$ ही व्याख्या आपल्या घातांकांच्या सार्वत्रिक नियमाशी सुसंगत आहे, ते कळलं का?

मंदार : सर तसं काटकोनाच्या आणि विशाल कोनाच्या sine करताही करता येतं, असं तुम्हाला म्हणायचंय का?

प्राध्यापक : का नाही म्हणू?

शेखर : आम्हाला समजेल? सांगाल?

प्राध्यापक : अवश्य. पण, एक लक्षात घ्या की परिस्थितीनुसार आपल्याला नेहमीच आपल्या व्याख्येत काही बदल, काही दुरूस्त्या किंवा विस्तार करणं भाग पडतं. कोनाकरता तसं काय करायचं ते आता पुढच्या वेळी पाहू.

लेखाचा दुसरा भाग वाचा पुढच्या आठवड्यात.

पूर्वप्रसिद्धी : शैक्षणिक संदर्भ अंक ५४ ऑक्टोबर - नोव्हेंबर २००८.

§§§

लेखक : मनोहर राईलकर, गणिताचे प्राध्यापक होते. गणित विषयावर अनेक पुस्तके प्रसिद्ध, अतिशय रंजक पद्धतीने गणित शिकवत असत.

(कळीचे शब्द : त्रिकोणमिती, लघुकोन व विशालकोन असलेल्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढण्याची सूत्रे)

शैक्षणिक संदर्भ द्वैमासिकाविषयी

शैक्षणिक संदर्भ हे पालकनीती परिवाराचे द्वैमासिक ऑगस्ट १९९९ पासून संदर्भ सोसायटी प्रकाशित करत आहे. मराठीतून चांगले विज्ञान वाचायला मिळावे, शालेय व महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांच्या कुतूहलाला प्रोत्साहन मिळावे, अनुभवांना जोडून असलेल्या विज्ञानाची सहज ओळख व्हावी आणि समाजात वैज्ञानिक दृष्टिकोन वाढावा, हे याचे उद्देश आहेत.

२०१८ सालापासून आम्ही शैक्षणिक संदर्भची छापील आवृत्ती न काढता इ-अंक प्रकाशित करत आहोत व इमेल आणि व्हॉट्सॅपच्या माध्यमातून वाचकांपर्यंत पोहोचवत आहोत.

आपल्याला आमचे अंक वाचायचे असल्यास आपला इ-मेल पत्ता आणि व्हॉट्सॅप क्रमांक (ऐच्छिक) आम्हाला sandarbh.marathi@gmail.com वर पाठवावा. दर आठवड्याला एक लेख व दर दोन महिने पूर्ण झाल्यावर आठ लेखांचा एकत्रित एक अंक असे आपल्याला पीडीएफ स्वरूपात मिळतील.

www.sandarbhsociety.org या वेबसाईटला जरूर भेट द्या. जुने अंकही त्यावर पीडीएफ स्वरूपात उपलब्ध आहेत.

हा उपक्रम विनामूल्य आहे, पण आपण आपला सहभाग ऐच्छिक देणगी रूपात संदर्भ सोसायटीकडे पाठवू शकता. अधिक माहिती वेबसाइटवर उपलब्ध आहे.

- संपादक मंडळ, शैक्षणिक संदर्भ व विश्वस्त मंडळ, संदर्भ सोसायटी