

शैक्षणिक संदर्भ अंक १३७ (ऑगस्ट - सप्टेंबर २०२२)

प्रश्नांकडून उत्तरांकडे प्रवास - भाग २

# आराखड्याची ओळख

लेखक : किरण बर्वे

प्रश्नांकडून उत्तरांकडे प्रवास - भाग २

# आराखड्याची ओळख

लेखक : किरण बर्वे

आपण सुरुवातीच्या लेखात How to Solve It या पुस्तकातल्या आराखड्याचा



उल्लेख केला होता. या लेखात आपण आराखड्यातील काही मुख्य मुद्दे समजावून घ्यायला सुरुवात करणार आहोत.

१. गणित समजावून घेणे :

अ. काय विचारले आहे? काय माहीत नाही, काय काढायचे आहे? कोणते विधान सिद्ध करायचे

आहे का?

ब. कोणती माहिती दिली आहे?

क. दिलेल्या माहितीतील प्रत्येक घटक सुटा सुटा समजला आहे का? त्या घटकांचे एकमेकांशी कोणते संबंध आहेत? आणि मुख्य म्हणजे या सर्व माहितीचा जे काढायचे, उत्तर विचारले आहे त्याच्याशी कसा, कोणता संबंध आहे?

२. गणित अशा तऱ्हेने समजावून घेतले की ते सोडवायचे कसे यांची कल्पना मनात आकार घेते. उत्तराकडे जाण्याची योजना आपण तयार करतो.

३. योजनेची कार्यवाही करून त्यात ठरवलेले टप्पे सोडवत, किंवा पूर्ण करत जाणे. उत्तर काढणे.

आपण गणित समजावून घेणे या टप्प्याचा अधिक विचार करू.

एवढे काय आहे विशेष या मुद्द्यात? खरोखरच विशेष फारसे नाही. जे प्रश्न विचारले आहेत, ज्या क्रमाने विचारले आहेत ते, सामान्य आकलनातून, कॉमन सेन्स मधून आलेले आहेत. अर्थात हे कुठल्याही प्रश्नांच्या सोडवणुकीसाठी उपयोगी



पडतील. आपण ही पद्धत वापरतच असतो. तरीही उजळणी होईल आणि स्पष्टता येईल.

शिकवताना शिक्षक विद्यार्थ्यांकडून उत्तरे काढून घेतात. त्या वेळी ते विद्यार्थ्यांना सहज उत्तरे सुचू शकतात असे प्रश्न विचारतात. मग एकातून दुसरा अशा पद्धतीने छोटे छोटे

उपप्रश्न विचारत पुढे आपण मुख्य प्रश्नाच्या उत्तराकडे जात राहतो. आणि मुख्य प्रश्नाचे उत्तर कसे मिळेल यांची योजना मनात तयार होते.

आराखड्यातील क्रमाने येणारे टप्पे म्हणजे उत्तर शोधण्याच्या प्रवासात घडणाऱ्या मानसिक क्रियांचे वर्णन, नोंद आहे. गणित सोडवताना वरील प्रश्न मनात असले तर मुद्दाम प्रयत्न न करता, विचार प्रक्रियेत अडथळे न येता आपण उत्तरापाशी पोचतो.

‘भास्कराचार्य गणित प्रज्ञा शोध स्पर्धा’ ५वी, ६वी, २०१६. प्रश्न २ - उपप्रश्न १०  
आपण सोडवणार आहोत.

७ पुरुष, ११ स्त्रिया आणि ५ मुलांमध्ये १४० रुपये अशा पद्धतीने वाटायचे आहेत की,

अ. प्रत्येक पुरुषाला प्रत्येक मुलाच्या तिप्पट रक्कम मिळते.

आ. एक पुरुष आणि एक मुलगा दोघाना मिळून जेवढी रक्कम मिळते तेवढी रक्कम प्रत्येक स्त्रीला मिळते.

तर,

प्रत्येक पुरुष, प्रत्येक स्त्री व प्रत्येक मुलाला किती रक्कम मिळेल ते काढा.

विद्यार्थ्यांने थोडा विचार केला तर, उदाहरण सोडवणे विद्यार्थ्यांच्या आवाक्यात आहे. मात्र अशा उदाहरणाचे उत्तर काढायची रीत विद्यार्थ्यांना सहसा शिकवली जात नाही. त्यामुळे मग हा प्रश्न कधीकधी विद्यार्थ्यांना समजत नाही. आपल्याला येणार नाही असे वाटू लागते. विद्यार्थी विनाकारण कच खातो. रीत अगोदर माहीत नसेल तरी आपण एखादा प्रश्न

सोडवू शकतो हा आत्मविश्वास आपण विद्यार्थ्यांना देऊ शकलेलो नाही, हे आपल्यासाठी, समाज, पालक, शिक्षक सर्वांसाठी लज्जास्पद आहे. व्यक्तीच्या आयुष्यातल्या प्रत्येक प्रश्न सोडवण्याच्या रीती कोणीतरी आपल्याला शिकवणार आहे या भ्रमात आपण वावरत आहोत का?

रीत माहित नाही म्हणून फारसा प्रयत्न केला जात नाही. अगोदर न सोडवलेला प्रश्न



असला तरी तो सोडवणे शक्य आहे हा विचार डोक्यात येत नाही. इथेच अशी पद्धत माहित असण्याचे महत्त्व जाणवते. कोणताही प्रश्न सोडवण्यासाठी कशी सुरुवात करायची, पुढे कसे

सरकायचे, त्यातील टप्पे कोणते हे जर विद्यार्थ्यांला माहित असेल तर मग आपण सुरुवात करू, पुढे जात राहू आणि मग यश आपलेच आहे, हा विश्वास विद्यार्थ्यांला वाटेल!

प्रश्न सोडवायच्या पद्धतीनुसार टप्प्याटप्प्याने प्रश्न सोडवू.

पायरी पहिली

**गणित समजावून घेणे :**

माहिती समजावून घेताना, काय काढायचे आहे - हे सर्वप्रथम ठरवायचे आहे.

प्रत्येक पुरुष, प्रत्येक स्त्री व प्रत्येक मुलाला किती रक्कम मिळेल.

काही पुरुष, स्त्रिया, मुले काम करत आहेत, त्याचा मोबदला त्यांना मिळायचा आहे.

त्यात पुरुष, स्त्री आणि मुले यांचा प्रत्येकी वाटा किती? असा प्रश्न सोडवायचा आहे.

या शिवाय कोणती माहिती दिली आहे? त्यात दोन विधाने आहेत. ते एकूण रक्कम वाटण्यासंबंधीचे नियम आहेत.

>> एका पुरुषाला एका मुलाच्या तिप्पट रक्कम मिळते.

>> एक पुरुष आणि एक मुलगा दोघाना मिळून जेवढी रक्कम होते तेवढी रक्कम प्रत्येक स्त्रीला मिळते.

तिसरी माहिती आहे-

७ पुरुष, ११ स्त्रिया आणि ५ मुलांमध्ये १४० रु वरील नियमानुसार वाटायचे आहेत.

प्रत्येक घटक समजावून घेऊ.

पहिला घटक

पुरुषाला मिळणारी रक्कम = ३ मुलांना एकत्रित मिळणारी रक्कम. (१)

पहिला घटक समजला आणि तो आपण अगदी स्पष्ट लिहिला. छान.

दुसरा घटक

एका पुरुषाला मिळणारी रक्कम + एका मुलाला मिळणारी रक्कम  
= एक स्त्रीला मिळणारी रक्कम (२)

ठीक. पहिले दोन्ही घटक सुटे समजले. त्या दोघांत काही संबंध आहे का? ..

पहिल्या घटकात एका पुरुषाला मिळणारी रक्कम ३ मुलांना एकत्रित मिळणाऱ्या रक्कमेइतकी आहे अशी महत्त्वाची माहिती आहे.

आता आपण पहिला आणि दुसरा घटक जोडणार आहोत. दुसऱ्या घटकात, पुरुषाला मिळणारी रक्कम म्हणजे तीन मुलांना मिळणारी रक्कम, असे घेऊ.

तीन मुलांना मिळणारी रक्कम + एका मुलाला मिळणारी रक्कम = एका स्त्रीला मिळणारी रक्कम

४ मुलांना मिळणारी रक्कम = एका स्त्रीला मिळणारी रक्कम (३)

वा. पहिली दोन्ही विधाने वापरून आपण निरीक्षणे नोंदवली आहेत. छानच !

आपल्याला अखेर काय हवे आहे? एका पुरुषाला, स्त्रीला आणि मुलाला मिळणारी रक्कम असे सुटे सुटे काढायचे आहे. म्हणजे प्रत्येकाच्या मोबदल्याचा आकडा काढायचा आहे. वरील माहितीत एकही संख्या नाही. लगेच काही लक्षात येत नाही. परत दिलेल्या माहितीकडे वळू.

अरेच्छ्या, माहितीचा एक घटक अजून वापरायचा आहे. तो म्हणजे ७ पुरुष, ११ स्त्रिया आणि ५ मुलांना वाटायला १४० रु लागतात, तो वापरू.

प्रत्येकाला मिळणारी रक्कम काढायची आहे. सुरुवात म्हणून एका कोणाला तरी मिळणारी रक्कम काढता येईल का? समजा एका कोणाला तरी मिळणारी रक्कम ठरली तर सर्वांची काढता येईल. असा कोणता घटक आहे, स्त्री का पुरुष वा मुलगा, ज्याला द्यायची रक्कम माहित झाली तर उरलेल्या दोघांची मिळेल?

परत एकदा आत्तापर्यन्त काय काय मिळाले परत लक्षात घेऊ. मिळालेली तीन समीकरणे परत लिहू.

एका पुरुषाला मिळणारी रक्कम = ३ मुलांना मिळणारी रक्कम. (१)

एका स्त्रीला मिळणारी रक्कम = ४ मुलांना मिळणारी रक्कम (२)

ओ. अगदी जवळ आलोय. सर्व माहिती वापरली आहे का ? माहितीतील तिसरा घटक ?

हो बरोब्बर. प्रथम समीकरण २ लिहू , आणि त्यात समीकरण १, ३ मधून मिळालेली माहिती वापरून सोपे रूप देऊ.

सात पुरुषांना मिळणारी रक्कम + अकरा स्त्रियांना मिळणारी रक्कम + पांच मुलांना मिळणारी रक्कम = १४०

७ x ( तीन मुलांना मिळणारी रक्कम ) + ११ x (चार मुलांना मिळणारी रक्कम ) + पाच मुलांना मिळणारी रक्कम = (२१ + ४४ + ५ ) मुलांना मिळणारी रक्कम = ७० मुलांना मिळणारी रक्कम

आणि ७० मुलांना मिळणारी रक्कम = १४० रु

एका मुलाला मिळणारी रक्कम = २ रु

एका पुरुषाला मिळणारी रक्कम = ३ x २ = ६ रु.

एका स्त्रीला मिळणारी रक्कम = ४ x २ = ८ रु .

जे हवे होते ते मिळाले !!

आपण अगदी पद्धतशीर आपल्या आराखड्यातील पायऱ्यानुसार गणित सोडवले. क्रमाने विचारलेले प्रश्न सामान्य आकलनातून आलेले आहेत. मात्र हा आराखडा आपल्याला प्रश्नाला सुरुवात करायला आत्मविश्वास देण्यासाठी उपयोगी ठरला. आणि माहितीचा संपूर्ण उपयोग केला का - हा कळीचा प्रश्न त्यामुळे सुचला. हा आराखड्याचा



उपयोग आहे. काय काढायचे आहे ते सतत मनात ठेवून माहितीचे विश्लेषण, त्यात परत नियम आणि संख्यात्मक माहिती असा शांतपणे सुटा विचार केला. हा विचार करता करताच प्रश्न सोडवायची योजना समोर आली. आणि ती योजना अमलात आणताच उत्तर मिळाले!

परत एकदा लक्षात घ्या आराखड्यातील क्रमाने येणारे टप्पे, उत्तर शोधण्याच्या प्रवासात घडणाऱ्या मानसिक क्रियांचे वर्णन, नोंद आहे. त्यामुळे त्यांचे आकलन सहज होते मात्र आपण वारंवार करतो ती प्रक्रिया नीट सविस्तर समजून घेतली तर प्रश्न सोडवताना नक्कीच उपयोग होतो हे आपण बघितले. खरे ना?

**क्रमशः**

**§§§**

---

लेखक : किरण बर्वे, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान येथे गणित शिकवतात. विज्ञान व गणित विषयांत लेखन करतात. शैक्षणिक संदर्भ गटात सहभागी.

इ.मेल : [barvekh@gmail.com](mailto:barvekh@gmail.com)

(कळीचे शब्द : गणित समजावून घेणे, गणित सोडविण्याचा आराखडा, त्यातील टप्पे )

## शैक्षणिक संदर्भ द्वैमासिकाविषयी

शैक्षणिक संदर्भ हे पालकनीती परिवाराचे द्वैमासिक ऑगस्ट १९९९ पासून संदर्भ सोसायटी प्रकाशित करत आहे. मराठीतून चांगले विज्ञान वाचायला मिळावे, शालेय व महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांच्या कुतूहलाला प्रोत्साहन मिळावे, अनुभवांना जोडून असलेल्या विज्ञानाची सहज ओळख व्हावी आणि समाजात वैज्ञानिक दृष्टिकोन वाढावा, हे याचे उद्देश आहेत.

२०१८ सालापासून आम्ही शैक्षणिक संदर्भची छापील आवृत्ती न काढता इ-अंक प्रकाशित करत आहोत व इमेल आणि व्हॉट्सॅपच्या माध्यमातून वाचकांपर्यंत पोहोचवत आहोत.

आपल्याला आमचे अंक वाचायचे असल्यास आपला इ-मेल पत्ता आणि व्हॉट्सॅप क्रमांक (ऐच्छिक) आम्हाला [sandarbh.marathi@gmail.com](mailto:sandarbh.marathi@gmail.com) वर पाठवावा. दर आठवड्याला एक लेख व दर दोन महिने पूर्ण झाल्यावर आठ लेखांचा एकत्रित एक अंक असे आपल्याला पीडीएफ स्वरूपात मिळतील.

[www.sandarbhsociety.org](http://www.sandarbhsociety.org) या वेबसाईटला जरूर भेट द्या. जुने अंकही त्यावर पीडीएफ स्वरूपात उपलब्ध आहेत.

हा उपक्रम विनामूल्य आहे, पण आपण आपला सहभाग ऐच्छिक देणगी रूपात संदर्भ सोसायटीकडे पाठवू शकता. अधिक माहिती वेबसाईटवर उपलब्ध आहे.

- संपादक मंडळ, शैक्षणिक संदर्भ व विश्वस्त मंडळ, संदर्भ सोसायटी