

ऑगस्ट-सप्टेंबर २०२२

शैक्षणिक

अंक १३७

संदर्भ

शिक्षण आणि विज्ञान
यात रुची असणाऱ्यांसाठी



संपादक :

नीलिमा सहस्रबुद्धे, प्रियदर्शिनी कर्वे,
यशश्री पुणेकर, संजीवनी आफळे

मांडणी :

प्रियदर्शिनी कर्वे

मुखपृष्ठ मांडणी :

अभय ढमढेरे

इ-पेमेंट करीता तपशील:

Sandarbh Society

Account No.: 20047006634

Bank of Maharashtra,

Mayur Colony, Pune

IFS Code: MAHB0000852

शैक्षणिक

संदर्भ

अंक १३७

ऑगस्ट-सप्टेंबर २०२२

पालकनीती परिवारासाठी

निर्मिती आणि वितरण : संदर्भ

संदर्भ, द्वारा समुचित एन्व्हायरोटेक,
फ्लॉट नं. ६, एकता पार्क सोसायटी,
निर्मिती शोरूमच्या मागे, अभिनव शाळेशेजारी,
लॉ कॉलेज रस्ता, पुणे - ४११ ००४.
फोन नं. २५४६०१३८

E-mail : sandarbh.marathi@gmail.com
web-site : www.sandarbhsociety.org

देणगीचे चेक 'संदर्भ सोसायटी' या नावे काढावेत.

एकलव्य, होशंगाबाद यांच्या सहयोगाने हा अंक प्रकाशित केला जात आहे.

मुखपृष्ठाविषयी

शेवटचे हिमयुग संपल्यापासून जगाच्या विविध भागातील समाजांची वाटचाल भटक्या टोळ्यांपासून ते नागरी आणि शेतीप्रधान व्यवस्थेपर्यंत झालेली दिसते. इ. स. ८०० ते १२०० दरम्यान जागतिक पातळीवर झालेल्या हवामानातील बदलामुळे पावसाचे प्रमाण वाढले. त्यामुळे अन्नधान्याचे प्रमाण वाढून लोकसंख्या वाढली. पर्यायाने शहरीकरण आणि शेतीला चालना मिळाली. जगभरातील मानवी समूहांसाठी हा कालखंड भरभराटीचा ठरला.

या दरम्यान नवी शहरे वसवली गेली, नवी साम्राज्ये उदयाला आली आणि जगातील विविध भागातील समूहांचा संपर्क वाढून सामूहिक ज्ञाननिर्मितीला चालना मिळाली. या काळात शासनकर्त्यांनी खुश्कीच्या मार्गाने आणि समुद्रमार्गे व्यापार आणि सैन्याच्या दळणवळणासाठी नवीन रस्त्यांची आणि जहाजांची निर्मिती केली. लेखनकला, छपाईयंत्राचा शोध लागला, चलनी नाण्यांचा वापर होऊ लागला. व्यापाऱ्यांद्वारे कागदावर आपण एकमेकांना किती देणे लागतो हे लिहिलेल्या चिठ्ठ्यांची देवाणघेवाणही होऊ लागली व या चिठ्ठ्याही एकमेकांना विकता येऊ लागल्या.

मुखपृष्ठावर दिसत आहे रोमन काळात इस्रायलमध्ये बांधलेला जेरुसलेम हे जुने शहर आणि बाईत गुब्ब्रीन हे गाव यांना जोडणारा रस्ता. हा तेथील विभागीय महामार्ग ३७५ च्या बाजूने गेलेला आहे. दुसऱ्या चित्रामध्ये दिसते आहे इटलीतील रोम येथील ट्रान्जिन विजयस्तंभावर कोरलेली रस्ता बांधणी दर्शवणारी रचना. तिसरे चित्र आहे इ.स. १०२४ मध्ये जस्त व चांदीची टंचाई निर्माण झाल्याने चीनमधील साँग सम्राटांनी सरकारच्या वतीने नाण्यांच्या ऐवजी घायला सुरूवात केलेल्या चिठ्ठीचे.

अशा प्रकारे मानवी समाजव्यवस्थेचा पाया कसा रचला गेला हे वाचूया 'वर्तमानाची पायाभरणी' या डॉ प्रियदर्शिनी कर्वे यांनी लिहिलेल्या लेखात.

❖ मुखपृष्ठावरील चित्रे : १. व २. https://en.wikipedia.org/wiki/Roman_roads

३. [https://en.wikipedia.org/wiki/Jiaozi_\(currency\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Jiaozi_(currency))

❖ अंकातील इतर सर्व चित्रे इंटरनेटवरून साभार.

अनुक्रमणिका

शैक्षणिक संदर्भ अंक १३७ ऑगस्ट - सप्टेंबर २०२२

- वाचकांच्या प्रतिक्रिया - अंक १३६०४
- सिद्धांत आधी आम्ही मांडला!!! - अमित शांडिल्य
मराठी रूपांतर नीलिमा सहस्रबुद्धे :०७
- ब्रम्हपुत्रेतून पाण्याचा भावी विसर्ग आणि झाडांच्या खोडातील कडी
- डॉ. मुरारी तपस्वी१२
- प्रश्नांकडून उत्तरांकडे प्रवास - भाग २ : आराखड्याची ओळख
- किरण बर्वे१८
- महिन्यांची नावं कुठून आली? - डॉ नितीन हांडे २६
- वर्तमानाची पायाभरणी : महा इतिहास - भाग १९
- प्रियदर्शिनी कर्वे..... ३६
- Sin 90 = 1 का? भाग १ - प्रा. मनोहर राईलकर४५
- Sin 90 = 1 का? भाग २ - प्रा. मनोहर राईलकर..... ५४
- धुक्याचं पाणी - यशश्री पुणेकर ६५



हे लेख शालेय पाठ्यक्रमाला पूरक आहेत.

वाचकांच्या प्रतिक्रिया अंक १३६

लेख : डॉ कमल रणदिवे

सप्रेम नमस्कार.

फारच सखोल माहिती डॉ कमल रणदिवेंबद्दल. वैज्ञानिकांनी रिटायर्ड व्हायचे नसते, सतत संशोधन करायचं असतं, हे ऋषीतुल्य जीवन जगून सिद्ध केले. माहितीपूर्ण लेख.

दिलीप भगवानराव सावरकर

†††

लेख : शीतसाखळी

संपादक संदर्भ,

शीतसाखळी खूप सुंदर लेख. खऱ्या अर्थाने लससाक्षर करणारे लेखन. भारताच्या कामगिरीबद्दल अभिमान वाटतो.

लेखकाचे अभिनंदन.

दिलीप भगवानराव सावरकर

†††

लेख : कंटाळा आलाय !

उत्तम लेख, आवडला, आपल्याकडेही जुलै महिना पावसामुळे कंटाळवाणा ठरू शकतो तेव्हा त्या दृष्टीने अतिशय उपयोगी आहे.

धन्यवाद.

मेघा घांग्रेकर

†††

लेख : प्रश्नांकडून उत्तराकडे प्रवास

नमस्कार,

आपला गणित किंवा प्रश्न यांची उकल करण्याची पद्धत याविषयीचा किरण बर्वे यांचा पहिला लेख वाचला. अतिशय सोप्या आणि ओघवत्या भाषेत आहे, पुढील लेख वाचण्याची उत्सुकता आहे.

खूप शुभेच्छा !

धन्यवाद .

सविता पुंडलिक

†††

लेख : ग्रेट पॅसिफिक गार्बेज पॅच

संपादक,

ग्रेट पॅसिफिक गार्बेज पॅच वरील या विस्तृत लेखामुळे समस्येची भव्यता कळली. प्लास्टिक वापरणे बंद करणे हाच उपाय दिसतो सध्या तरी.

खूप माहितीपूर्ण लेख.

दिलीप भगवानराव सावरकर

†††

Sir,

I am thankful to you for sending me an e - copy of Sandarbha. I read all lekh and like the variety of lekh. It is written in simple Marathi and easy to understand. The topics are also interesting.

This time lekh by Yashshri punekar is also very good and realised that the population on earth is creating huge garbage in Ocean and few people are taking great efforts to clean it.

SANDARBH SOCIETY is doing good work with dedication

Thank you very much

सुलभा कुलकर्णी

---xxx---

शैक्षणिक संदर्भच्या इ-अंकाला आपला भरघोस प्रतिसाद मिळतो आहे त्याबद्दल धन्यवाद. इ अंक-करताना छपाई खर्च जरी वाचला तरी डीटीपी, कार्यालयीन खर्च, लेखा परीक्षण असे अनेक खर्च आहेतच. देणगी रूपाने आपण या खर्चाचा भार उचलू शकता. त्यासाठी आपणास विनंती आहे की आपला सहभाग देणगीच्या रूपात संदर्भ सोसायटीकडे पाठवावा व हा उपक्रम सुरू ठेवण्यास सहकार्य करावे. देणगीवर आयकर सवलत मिळू शकते. देणगीसाठी तपशील अंकाच्या दुसऱ्या व शेवटच्या पानावर उपलब्ध आहे.

सिद्धांत आधी आम्ही मांडला!!!

लेखक : अमित शांडिल्य मराठी रूपांतर : नीलिमा सहस्रबुद्धे

आपल्या देशात काहींना असे वाटते आहे की पायथागोरसचा सिद्धांत आधी वेदात

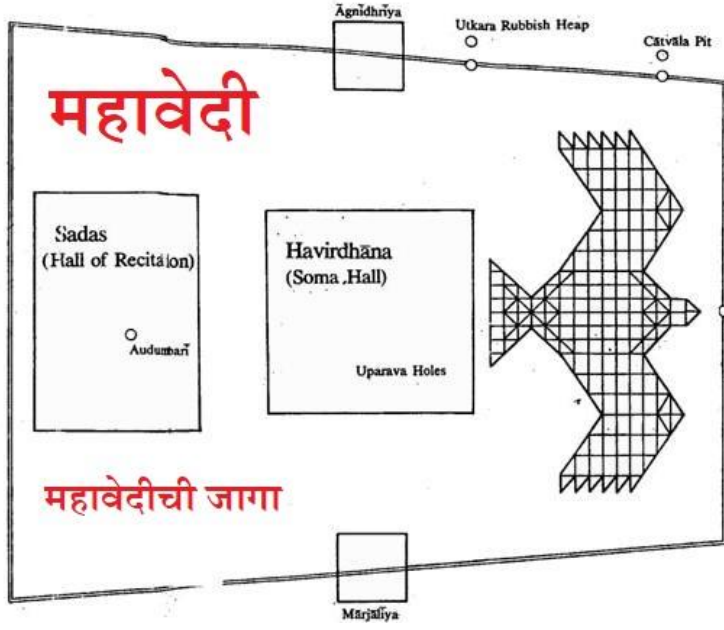
मांडलेला होता, नंतर तो पायथागोरसच्या नावाने प्रसिद्ध झाला...

अमित शांडिल्य यांनी ट्विटरवरती याबद्दल लिहिले आहे. ते म्हणतात -

वैदिक गणित हे ऐकायला 'भारी' वाटते, त्यात काही प्रचंड मोठ्या आणि सूक्ष्म संख्या आहेतही; मात्र त्यात प्राथमिक भूमिती सापडते, बीजगणित किंवा उच्च भूमिती नाही.

मग पायथागोरस सिद्धांत कुठे आहे? तो वेदांच्या संहितेत किंवा ब्राह्मणात नाही, शुल्बसूत्रांत दिलेला आहे. शुल्ब म्हणजे दोर. आठ वेगवेगळ्या निबंधांत गणितातली सूत्रे

आढळतात. यज्ञभूमी आणि यज्ञवेदी तयार करण्यासाठी कोणत्या मापाचे दोर कसे



वापरावेत याबद्दल ही सूत्रे आहेत. यात प्राथमिक भूमितीचा प्रत्यक्ष वापर आहे. बौधायन शुल्बसूत्रात महावेदी अचूक बांधण्यासाठी निर्देश आहेत. इथे भूमितीपेक्षा धर्म प्रथम स्थानी आहे. याधीच्या शतपथ ब्राह्मणात महावेदीचा

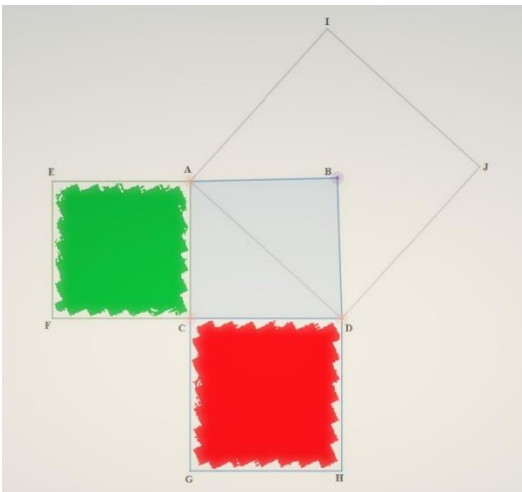
उल्लेख आहे, पण त्यात सुस्पष्ट भूमिती दिलेली नाही.

तेथे दिलेला मूळ श्लोक असा आहे :

दीर्घचतुरश्रस्याक्षणया रज्जुः पार्श्वमानी तिर्यग् मानी च यत् पृथग् भूते कुरुतस्तदुभयं करोति॥

लांबी आणि रुंदी वरच्या चौरसांचे क्षेत्र मिळून कर्णावरचे क्षेत्र बनते.

वेगळ्या शब्दांत सांगायचे झाले, तर, खालील आकृती वापरून सांगता येईल.



$$EFCA + CDHG = ADJI \text{ (क्षेत्रफळाप्रमाणे)}$$

$$EFCA = AC^2$$

$$CDHG = CD^2$$

$$ADJI = AD^2$$

पुढे वापरून,

$$AD^2 = AC^2 + CD^2$$

म्हणजेच,

$$AD = \sqrt{(AC^2 + CD^2)}$$

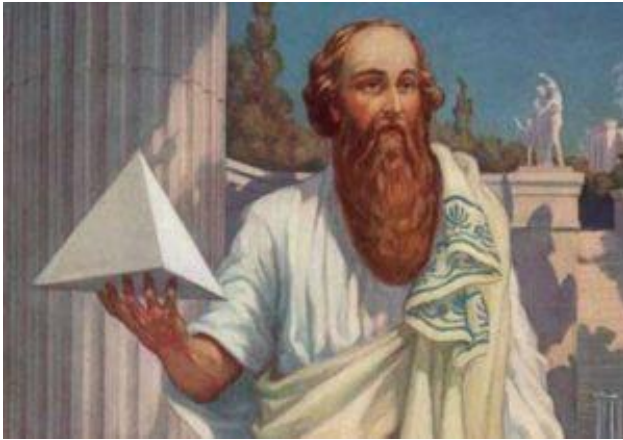
पुढच्या सूत्रात काही उदाहरणे दिलेली आहेत.

३ व ४, १२ व ५, १५ व ८, ७ व २४, १२ व ३५, १५ व ३६.

हेच अंक वेदी बांधायला वापरले जात असावेत.

थोडक्यात, इथे एक मान्यताप्राप्त सूत्र मांडले गेले आहे. त्याची सिद्धता दिलेली नाही. शिवाय इथे विशिष्ट संख्यांच्या संदर्भात त्याचा उल्लेख आहे. त्यांना इतर संख्यांची, सिद्धतेची गरज नव्हती.

पायथागोरसने मांडलेला सिद्धांत हा अधिक व्यापक होता, सर्व संख्यांसाठी होता.



त्यात एकेका पायरीने सिद्धता दिलेली होती. त्यामुळे त्याच्या नावे तो ओळखला जाणे अनेकांना योग्यच वाटेल. उदाहरणार्थ, दा-विन्सीने विमानाची कल्पना रेखाटली त्यानंतर शतके गेली.

पुढे राईट बंधूंनी ते प्रत्यक्ष बनवले. पण विमानाचा शोध लावणारे म्हणून राईट बंधूंचेच नाव घेतले जाते.

बौधायनाची सूत्रे पायथागोरसच्या जन्माच्या आधी तीनेक शतके लिहिलेली आहेत. इ.स.पूर्व ८००. शिवाय या दोन्ही संस्कृतींचा संबंध तोपर्यंत आलेला नव्हता. तो

अलेक्झांडरच्या काळात आला. त्यामुळे दोघांनी आपापल्या काळात स्वतंत्रपणे ते लिखाण केलेले आहे.

आणखी एक गोष्ट लक्षात घ्यायला हवी : १९२० साली दक्षिण इराकमध्ये उत्खननात एक तक्ता कोरलेली एक मातीची पाटी सापडली. त्यावरची अक्षरे १९४५ साली वाचता आली. ते होते प्राचीन बाबिलोनियन लिपीतील आकडे. पायथागोरसच्या तीन तीन संख्यांच्या १५ जोड्या यावर कोरलेल्या होत्या. (बौधायनाने सहा जोड्या दिलेल्या आहेत.) सिद्धता इथेही दिलेली नाही. नियमात बसणाऱ्या संख्यांचा संच फक्त दिला आहे, जो तेव्हा वापरायला घेता आला असता. ही पाटी इ.स.पूर्व १८०० मधली असावी.



आणखी एक वस्तू आहे, बर्लिन पपायरस. हा साधारण इ.स.पूर्व १३०० मधला, प्राचीन इजिप्तमध्ये सापडलेला आहे. यावर एक गणित घातलेले आहे - एक संख्या दुसरीच्या पाउणपट आहे. दोन्हीच्या वर्गाची बेरीज १०० होते. तर त्या संख्या कोणत्या? आज बीजगणिताने त्या सोडवून उत्तर मिळेल. पण तेव्हा इजिप्तमध्ये बीजगणित माहीत नव्हते. पण त्यांना भूमिती येत होती. इ.स.पूर्व २६०० पासून इजिप्तमधले लोक काटकोन त्रिकोणाची भूमिती वापरत. आणि पपायरस शिवाय पिरामिड्सही त्याची खात्री देत आहेतच.

इजिप्तची बाबिलोनियाशी देवाणघेवाण होतीच, आणि भारत आणि बाबिलोनियाचीही होती. ज्ञान कुठे उत्पन्न झाले किंवा कुठून कुणाला दिले गेले याचे काही पुरावे मात्र नाहीत.

खरे सांगायचे तर रोमन लोकांनी (व्हिट्रुव्हियस इ.स.पूर्व १००) या सिद्धांताला पायथागोरसचे नाव दिले. आता तुम्हाला श्रेय दुसऱ्या कोणाला द्यायचे असेल तर तसे करता येईल - सर्वप्रथम शोधले म्हणून इजिप्तमधल्या लोकांना द्यावे लागेल; परिपूर्ण सिद्धांत मांडला म्हणून ग्रीकांना द्यावे लागेल.

मूळ लेख : <https://threadreaderapp.com/user/Schandillia>

§§§

लेखक : अमित शांडिल्य, टाटा स्टील येथे कार्यरत, गणित आणि शेअर बाजारात रूची.

मराठी रूपांतर : नीलिमा सहस्रबुद्धे, शैक्षणिक संदर्भ संपादक गटात सहभागी.

इ. मेल : neelimasahasrabudhe@gmail.com

(कळीचे शब्द : वैदिक गणित, पायथागोरसचा सिद्धांत, शुल्बसूत्रे, बौधायनाची सूत्रे, बर्लिन पपायरस)

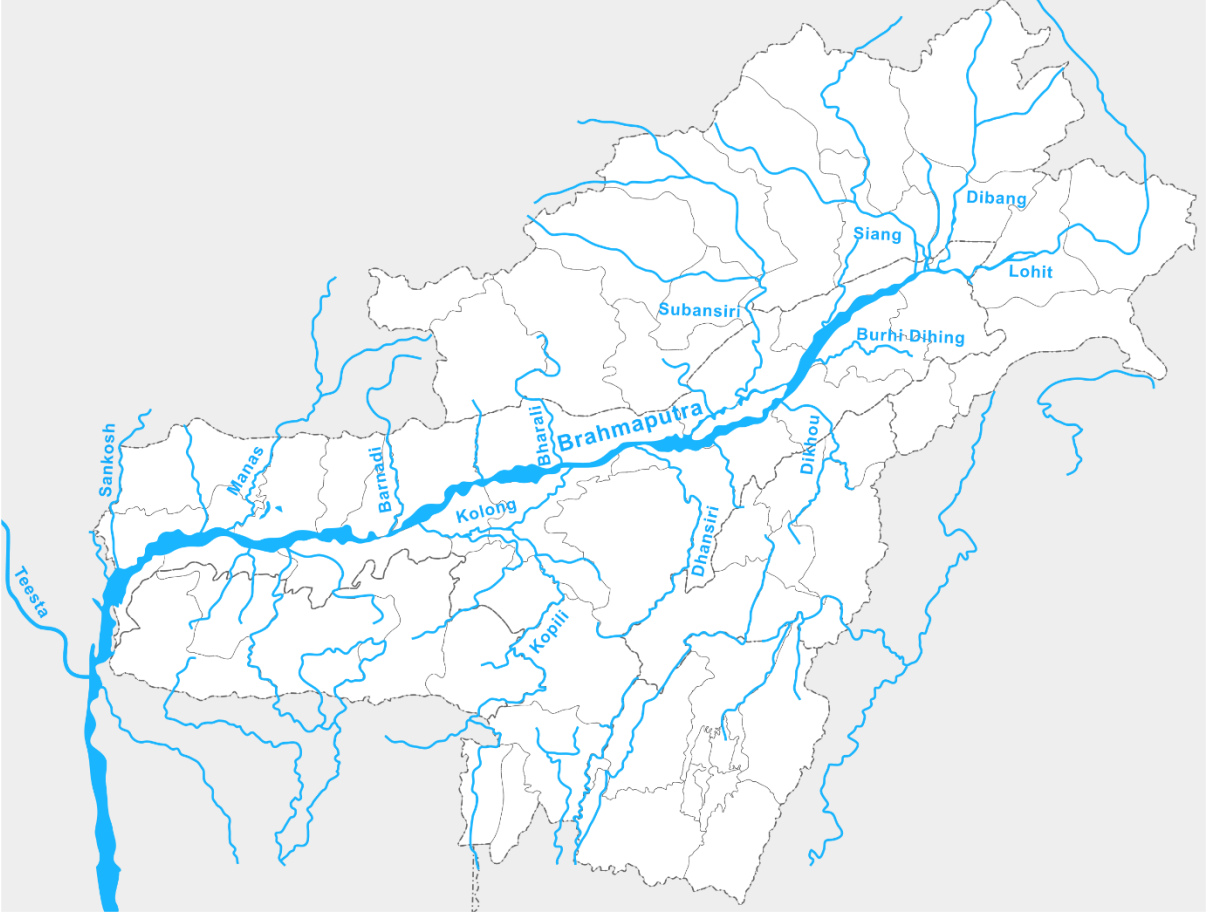
ब्रम्हपुत्रेतून पाण्याचा भावी विसर्ग आणि झाडांच्या खोडातील कडी

लेखक : डॉ. मुरारी तपस्वी

भारतातील नद्यांच्या विसर्गाचा विचार केला तर सुमारे अर्धा (~ ४०,००० घन मीटर) विसर्ग हा एकट्या ब्रह्मपुत्रा या नदीतून होतो. मुख्यत्वेकरून पाऊस आणि काही प्रमाणात हिमालयातील बर्फाच्या वितळण्यामुळे या नदीला एवढे पाणी असते. ब्रह्मपुत्रेच्या खोऱ्याचा विस्तार एवढा प्रचंड आहे की तिचा क्रमांक जगातल्या सर्वात मोठ्या नद्यांमध्ये तिसरा लागतो. तिचा विसर्ग, पात्र, ती करत असलेला प्रवास या सगळ्यातल्या विशालतेमुळे पूर्वोत्तर भारतातले नागरिक तर तिचा नदीऐवजी 'नद' आणि 'ब्रह्मपुत्र' असा पुल्लिंगी उच्चार करतात. बाकीच्या त्या नद्या पण हा मात्र नद!

ब्रह्मपुत्रा आणि तिच्या उपनद्या ईशान्य भारताबरोबरच बांगलादेश, भूतान, तिबेट आणि चीन या देशांमधील एकूण सहा कोटींहून अधिक लोकसंख्येचा आधार आहे (आकृती १ पहा). तेथील सामाजिक, पर्यावरणीय, सांस्कृतिक जीवन आणि आर्थिक स्रोताचा मुख्य आधार म्हणजे ब्रह्मपुत्र असे म्हटले जाते. मासेमारी व विविध हंगामात केलेल्या भाताच्या शेतांचे सिंचन त्या भागात सुबत्ता आणते. पाण्याच्या लोंढ्याबरोबर वाहात आलेला गाळ शेतीला तर उपकारक ठरतोच पण नदीतल्या अनेक बेटांना वाळूचा

पुरवठा करत त्यांचे अस्तित्व टिकवून ठेवतो आणि सुंदरबनातील काही सखल भागात बंगालच्या उपसागरातील खारे पाणी अडवत तिथली आर्थिक गणितं बसवतो.



आकृती १ ब्रम्हपुत्र नदीचा विस्तार दाखवणारा नकाशा.

असे जरी असले तरी नदीला आलेले पूर त्या भागात, विशेषतः आसाम आणि बांगलादेशात, वाताहातही घडवून आणतात. जुलै ते सप्टेंबर दरम्यान दहा दिवसांपेक्षा अधिक पाऊस पडला तर पूर हा ठरलेलाच. १९९८ सालचा पूर सुमारे ७०% आसाम आणि बांगलादेश जलमय करून गेला आणि सुमारे तीन कोटी नागरिकांवर आणीबाणीची परिस्थिती ओढवली, हे मोठेच उदाहरण. १९८७, १९८८, २०१० आणि २०२० या वर्षांतील पूरही काही कमी हानी पोहोचवणारे नव्हते. अनेक नागरिकांची रोजीरोटी काढून घेणारे आणि ओला दुष्काळ आणणारे असे हे पूर होते.

मानवनिर्मित सल्फेटच्या वातावरणातील सूक्ष्मतुषारांमुळे (मुख्यतः विसाव्या शतकाच्या जवळजवळ मध्यापर्यंत होत असलेल्या सल्फरयुक्त डिझेलच्या वापराने हे प्रदूषण झाले) विसाव्या शतकाच्या उत्तरार्धात जरी एकूण पावसाच्या सरासरीत घट दिसत असली तरी एकविसाव्या शतकात वातावरणात सल्फेटमधील घट (मुख्यतः सल्फरयुक्त डिझेलचा वापर जगभरात बंद झाल्यानंतर) आणि जागतिक वातावरण बदल (खनिज इंधनांच्या वापरामुळे व औद्योगीकरणामुळे झालेल्या कार्बन डाय ऑक्साईड व इतर हरितगृह वायूंच्या अतिरिक्त उत्सर्जनाचा परिणाम) या दोन कारणांमुळे पाऊस यापुढे मोठ्या प्रमाणात पडेल असे अंदाज आहेत.

हा वाढीव पाऊस आणि जागतिक तापमानवाढीमुळे हिमनगांचे वितळण्याचे प्रमाण याचा विचार करता ब्रह्मपुत्रेला पूर येऊन तेथील परिस्थिती वारंवार बिकट होण्याची शक्यता आहे. पण किती मोठ्या प्रमाणात पूर येतील याचा अंदाज कसा करायचा?

भविष्यकाळात काय बदल घडू शकतात याचा अंदाज भूतकाळात काय घडले आहे यावरून बांधले जातात. बहादुराबाद (बांगलादेश) येथे पर्जन्यमापक उपकरणे वापरून गोळा केलेली १९५६ ते २०११ च्या दरम्यानची माहिती उपलब्ध आहे. पण ही सुमारे साठ वर्षांची माहिती येत्या शतकाच्या वर्षांमध्ये काय वाढून ठेवले आहे याचा अंदाज घेण्याकरता तोकडी ठरते. अशा वेळी निसर्गाने मागे ठेवलेल्या पाऊलखुणा वापरून अशी माहिती गोळा करण्याची पध्दत आहे. याला पुराजीवशास्त्र असे म्हणतात. उदा. जुन्या वृक्षांच्या खोडांचा आडवा छेद (आकृती २ पहा) गेल्या अनेक वर्षांच्या हवामानावर प्रकाश पाडतो. दरवर्षी खोडाची जाडी वाढते आणि त्या जाडीशी निगडित एका कड्याची

(रिंग) भर पडते. कड्याची जाडी विशिष्ट वर्षातील हवामानाची माहिती पुरवते. म्हणजे असे की एखाद्या वर्षी उत्तम पाऊस पडला असेल तर कड्याची जाडी रुंद तर दुष्काळी



आकृती २ वृक्षांच्या खोडाच्या छेदातील कडी. दरवर्षी एका कड्याची भर पडते. कड्याची जाडी त्या वर्षीच्या पावसाच्या प्रमाणावर अवलंबून असते.

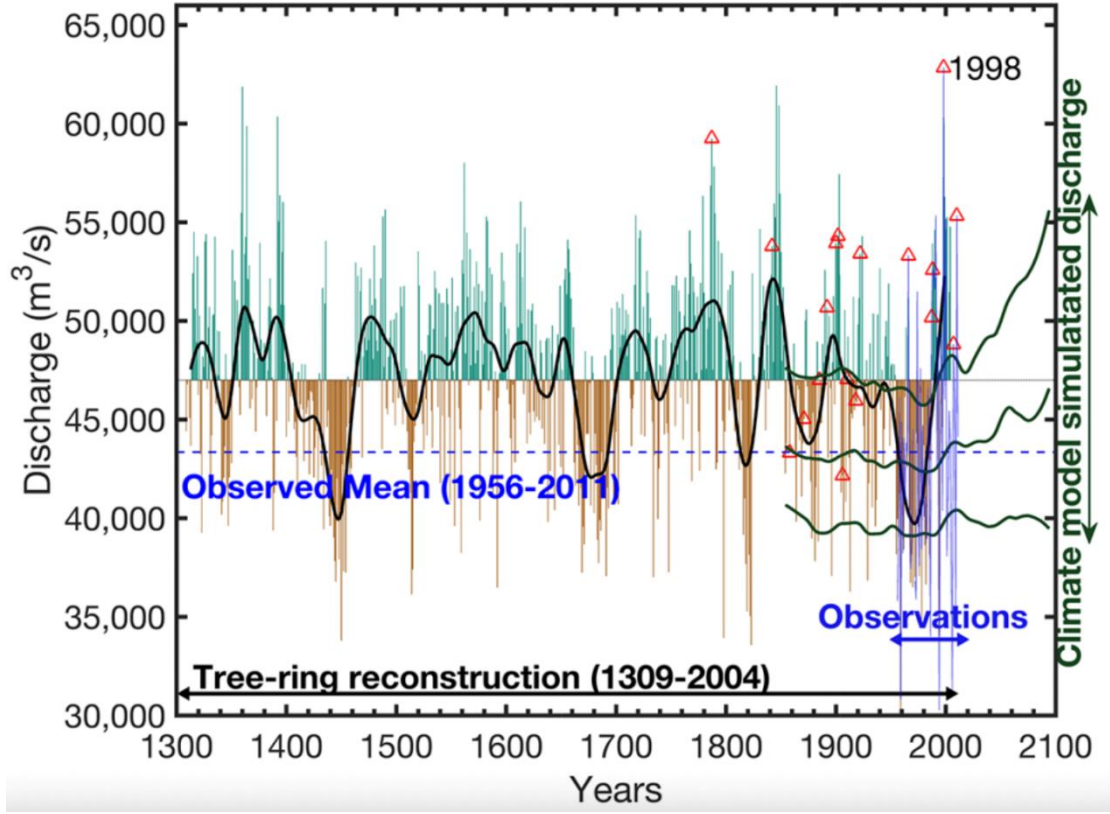
परिस्थितीत ती अरुंद. यावरून विशिष्ट वर्षी किती पाऊस पडला याचा अंदाज बांधता येतो.

सर्व जगभरातून गोळा

केलेल्या वृक्षांच्या खोडांच्या छेदांची जपणूक 'इंटरनॅशनल ट्री

रिंग डेटा बँक' या अमेरिकेच्या संस्थेत केलेली आहे. एका भारतीय वंशाच्या संशोधकाच्या नेतृत्वाखाली आंतरराष्ट्रीय शास्त्रज्ञांच्या चमूने ब्रह्मपुत्रेच्या खोऱ्यातील २८ झाडांच्या खोडातील कड्यांचा अभ्यास केला आणि त्यातून त्यांना इ.स. १३०९ ते २००४ पर्यंतच्या हवामानाचा अंदाज बांधता आला. ही सुमारे सातशे वर्षांची माहिती त्यांनी उपलब्ध असलेल्या उपकरणांद्वारे गोळा केलेल्या गेल्या साठ वर्षातील माहितीशी निगडीत केली आणि हवामानातील इतर बदलांचा मागोवा घेत ब्रह्मपुत्रेच्या खोऱ्यात एकविसाव्या शतकात दरवर्षी किती पाऊस पडेल, याचा अंदाज बांधला आहे (आकृती ३ पहा).

पर्जन्यमापक उपकरणांद्वारा गोळा केलेल्या गेल्या केवळ साठ वर्षांच्या माहितीवरून अंदाज बांधण्याऐवजी वृक्षांच्या खोडांमध्ये दडलेल्या सातशे वर्षांच्या पावसाच्या प्रमाणाच्या माहितीवरून दीर्घकालीन अंदाज बांधणे केव्हाही शहाणपणाचे!



आकृती ३ बहादुराबाद (बांगलादेश) येथे जुलै ते सप्टेंबर (१९५६ ते २०११) दरम्यान झालेल्या विसर्गाची उपलब्ध नोंदींवरून काढलेली सरासरी (४३,३५० घन मीटर प्रति सेकंद) (तुटक निळी रेषा) आहे तर खोडाच्या छेदातील कड्यांच्या अभ्यासातून ७०० वर्षांत (१३०९ ते २००४ दरम्यान) झालेल्या विसर्गाचा अंदाज (सरासरी ४६,९९३±८१२ घन मीटर प्रति सेकंद) (सलग राखाडी रेषा) इतका आहे. हिरव्या आणि तपकिरी रंगातले आलेख ही सरासरी काढण्यासाठी वापरले आहेत. २०११ नंतरची विसर्गाची उपकरणांनी नोंदलेली निरीक्षणे निळ्या रंगातील आलेखात आहेत. तिन्ही प्रकारच्या उपलब्ध माहितींवरून सैध्दांतिक अभ्यासाद्वारे भावी विसर्गाच्या भाकितांचे आलेख आकृतीत उजव्या बाजूला आहेत. १७८७ ते २०१० दरम्यान ब्रह्मपुत्रेला आलेले पूर लाल त्रिकोणात दाखवले आहेत.

मुख्य म्हणजे गेल्या साठ वर्षांच्या माहितीवरून बांधलेला अंदाज एकूण विसर्गात सरासरी वाढ जरी दाखवत असला तरी ती सरासरीपेक्षा फार मोठी नसल्याने आपण त्याचे नियोजन करायला काणाडोळाच होण्याची शक्यता अधिक. पण सातशे वर्षांच्या सरासरीवरून बांधलेला अंदाज ही वाढ फार मोठी असल्याचे दाखवतो. दर वर्षी हा विसर्ग

वाढत जाऊन २१०० साली दर सेकंदाला सुमारे ५५,००० घनमीटर होईल असे हा अंदाज सांगतो. त्यामुळे चालू शतकात इतकी वाढ होईल हे समजून आपल्याला नियोजन करावे लागेल. हे पूर व चक्रीवादळांमुळे होणारी मनुष्यहानी आणि वित्तहानी टाळण्यासाठी आवश्यक आहे.

वैज्ञानिक संशोधन भविष्यात असे डोकावून बघायला मदत करते. ते समजावून घेत योग्य त्या उपाययोजना करण्याची यापुढची जबाबदारी असते ती धोरणकर्त्यांची.

संशोधनाची माहिती व आकृती ३ साठी संदर्भ:

Rao, M. P. et al. (2020) Seven centuries of reconstructed Brahmaputra river discharge demonstrate underestimated high discharge and flood hazard frequency. *Nature Communications*. 11; Article ID: 6017. <https://dx.doi.org/10.1038/s41467-020-19795-6>

मूळ लेखासाठी पहा <http://muraritapaswi.blogspot.com/>

§§§

लेखक: **मुरारी तपस्वी**, राष्ट्रीय समुद्रविज्ञान संस्था, गोवा येथून ग्रंथपाल म्हणून निवृत्त.
ग्रंथालयशास्त्रात विद्या वाचस्पती.

इमेल: tapaswimurari@gmail.com

(कळीचे शब्द: ब्रम्हपुत्रा विसर्ग, नद्यांना येणारे पूर, पुरामुळे नुकसान, ट्रीरिंग, पावसाच्या प्रमाणातील बदल, सल्फर प्रदूषण, जागतिक वातावरण बदल)

प्रश्नांकडून उत्तरांकडे प्रवास - भाग २

आराखड्याची ओळख

लेखक : किरण बर्वे

आपण सुरुवातीच्या लेखात How to Solve It या पुस्तकातल्या आराखड्याचा



उल्लेख केला होता. या लेखात आपण आराखड्यातील काही मुख्य मुद्दे समजावून घ्यायला सुरुवात करणार आहोत.

१. गणित समजावून घेणे :

अ. काय विचारले आहे? काय माहित नाही, काय काढायचे आहे? कोणते विधान सिद्ध करायचे आहे का?

ब. कोणती माहिती दिली आहे?

क. दिलेल्या माहितीतील प्रत्येक घटक सुटा सुटा समजला आहे का? त्या घटकांचे एकमेकांशी कोणते संबंध आहेत? आणि मुख्य म्हणजे या सर्व माहितीचा जे काढायचे, उत्तर विचारले आहे त्याच्याशी कसा, कोणता संबंध आहे?

२. गणित अशा तऱ्हेने समजावून घेतले की ते सोडवायचे कसे यांची कल्पना मनात आकार घेते. उत्तराकडे जाण्याची योजना आपण तयार करतो.

३. योजनेची कार्यवाही करून त्यात ठरवलेले टप्पे सोडवत, किंवा पूर्ण करत जाणे. उत्तर काढणे.

आपण गणित समजावून घेणे या टप्प्याचा अधिक विचार करू.

एवढे काय आहे विशेष या मुद्द्यात? खरोखरच विशेष फारसे नाही. जे प्रश्न विचारले आहेत, ज्या क्रमाने विचारले आहेत ते, सामान्य आकलनातून, कॉमन सेन्स मधून आलेले आहेत. अर्थात हे कुठल्याही प्रश्नांच्या सोडवणुकीसाठी उपयोगी



पडतील. आपण ही पद्धत वापरतच असतो. तरीही उजळणी होईल आणि स्पष्टता येईल.

शिकवताना शिक्षक विद्यार्थ्यांकडून उत्तरे काढून घेतात. त्या वेळी ते विद्यार्थ्यांना सहज उत्तरे सुचू शकतात असे प्रश्न विचारतात. मग एकातून दुसरा अशा पद्धतीने छोटे छोटे

उपप्रश्न विचारत पुढे आपण मुख्य प्रश्नाच्या उत्तराकडे जात राहतो. आणि मुख्य प्रश्नाचे उत्तर कसे मिळेल यांची योजना मनात तयार होते.

आराखड्यातील क्रमाने येणारे टप्पे म्हणजे उत्तर शोधण्याच्या प्रवासात घडणाऱ्या मानसिक क्रियांचे वर्णन, नोंद आहे. गणित सोडवताना वरील प्रश्न मनात असले तर मुद्दाम प्रयत्न न करता, विचार प्रक्रियेत अडथळे न येता आपण उत्तरापाशी पोचतो.

‘भास्कराचार्य गणित प्रज्ञा शोध स्पर्धा’ ५वी, ६वी, २०१६. प्रश्न २ - उपप्रश्न १०
आपण सोडवणार आहोत.

७ पुरुष, ११ स्त्रिया आणि ५ मुलांमध्ये १४० रुपये अशा पद्धतीने वाटायचे आहेत की,

अ. प्रत्येक पुरुषाला प्रत्येक मुलाच्या तिप्पट रक्कम मिळते.

आ. एक पुरुष आणि एक मुलगा दोघाना मिळून जेवढी रक्कम मिळते तेवढी रक्कम प्रत्येक स्त्रीला मिळते.

तर,

प्रत्येक पुरुष, प्रत्येक स्त्री व प्रत्येक मुलाला किती रक्कम मिळेल ते काढा.

विद्यार्थ्यांनी थोडा विचार केला तर, उदाहरण सोडवणे विद्यार्थ्यांच्या आवाक्यात आहे. मात्र अशा उदाहरणाचे उत्तर काढायची रीत विद्यार्थ्यांना सहसा शिकवली जात नाही. त्यामुळे मग हा प्रश्न कधीकधी विद्यार्थ्यांना समजत नाही. आपल्याला येणार नाही असे वाटू लागते. विद्यार्थी विनाकारण कच खातो. रीत अगोदर माहीत नसेल तरी आपण एखादा प्रश्न

सोडवू शकतो हा आत्मविश्वास आपण विद्यार्थ्यांना देऊ शकलेलो नाही, हे आपल्यासाठी, समाज, पालक, शिक्षक सर्वांसाठी लज्जास्पद आहे. व्यक्तीच्या आयुष्यातल्या प्रत्येक प्रश्न सोडवण्याच्या रीती कोणीतरी आपल्याला शिकवणार आहे या भ्रमात आपण वावरत आहोत का?

रीत माहीत नाही म्हणून फारसा प्रयत्न केला जात नाही. अगोदर न सोडवलेला प्रश्न



असला तरी तो सोडवणे शक्य आहे हा विचार डोक्यात येत नाही. इथेच अशी पद्धत माहीत असण्याचे महत्त्व जाणवते. कोणताही प्रश्न सोडवण्यासाठी कशी सुरुवात करायची, पुढे कसे

सरकायचे, त्यातील टप्पे कोणते हे जर विद्यार्थ्यांला माहीत असेल तर मग आपण सुरुवात करू, पुढे जात राहू आणि मग यश आपलेच आहे, हा विश्वास विद्यार्थ्यांला वाटेल!

प्रश्न सोडवायच्या पद्धतीनुसार टप्प्याटप्प्याने प्रश्न सोडवू.

पायरी पहिली

गणित समजावून घेणे :

माहिती समजावून घेताना, काय काढायचे आहे - हे सर्वप्रथम ठरवायचे आहे.

प्रत्येक पुरुष, प्रत्येक स्त्री व प्रत्येक मुलाला किती रक्कम मिळेल.

काही पुरुष, स्त्रिया, मुले काम करत आहेत, त्यांचा मोबदला त्यांना मिळायचा आहे.

त्यात पुरुष, स्त्री आणि मुले यांचा प्रत्येकी वाटा किती? असा प्रश्न सोडवायचा आहे.

या शिवाय कोणती माहिती दिली आहे? त्यात दोन विधाने आहेत. ते एकूण रक्कम वाटण्यासंबंधीचे नियम आहेत.

>> एका पुरुषाला एका मुलाच्या तिप्पट रक्कम मिळते.

>> एक पुरुष आणि एक मुलगा दोघाना मिळून जेवढी रक्कम होते तेवढी रक्कम प्रत्येक स्त्रीला मिळते.

तिसरी माहिती आहे-

७ पुरुष, ११ स्त्रिया आणि ५ मुलांमध्ये १४० रु वरील नियमानुसार वाटायचे आहेत.

प्रत्येक घटक समजावून घेऊ.

पहिला घटक

पुरुषाला मिळणारी रक्कम = ३ मुलांना एकत्रित मिळणारी रक्कम. (१)

पहिला घटक समजला आणि तो आपण अगदी स्पष्ट लिहिला. छान.

दुसरा घटक

एका पुरुषाला मिळणारी रक्कम + एका मुलाला मिळणारी रक्कम
= एक स्त्रीला मिळणारी रक्कम (२)

ठीक. पहिले दोन्ही घटक सुटे समजले. त्या दोघांत काही संबंध आहे का? ..

पहिल्या घटकात एका पुरुषाला मिळणारी रक्कम ३ मुलांना एकत्रित मिळणाऱ्या रक्कमेइतकी आहे अशी महत्त्वाची माहिती आहे.

आता आपण पहिला आणि दुसरा घटक जोडणार आहोत. दुसऱ्या घटकात, पुरुषाला मिळणारी रक्कम म्हणजे तीन मुलांना मिळणारी रक्कम, असे घेऊ.

तीन मुलांना मिळणारी रक्कम + एका मुलाला मिळणारी रक्कम = एका स्त्रीला मिळणारी रक्कम

४ मुलांना मिळणारी रक्कम = एका स्त्रीला मिळणारी रक्कम (३)

वा. पहिली दोन्ही विधाने वापरून आपण निरीक्षणे नोंदवली आहेत. छानच !

आपल्याला अखेर काय हवे आहे? एका पुरुषाला, स्त्रीला आणि मुलाला मिळणारी रक्कम असे सुटे सुटे काढायचे आहे. म्हणजे प्रत्येकाच्या मोबदल्याचा आकडा काढायचा आहे. वरील माहितीत एकही संख्या नाही. लगेच काही लक्षात येत नाही. परत दिलेल्या माहितीकडे वळू.

अरेचच्या, माहितीचा एक घटक अजून वापरायचा आहे. तो म्हणजे ७ पुरुष, ११ स्त्रिया आणि ५ मुलांना वाटायला १४० रु लागतात, तो वापरू.

प्रत्येकाला मिळणारी रक्कम काढायची आहे. सुरुवात म्हणून एका कोणाला तरी मिळणारी रक्कम काढता येईल का? समजा एका कोणाला तरी मिळणारी रक्कम ठरली तर सर्वांची काढता येईल. असा कोणता घटक आहे, स्त्री का पुरुष वा मुलगा, ज्याला द्यायची रक्कम माहीत झाली तर उरलेल्या दोघांची मिळेल?

परत एकदा आत्तापर्यन्त काय काय मिळाले परत लक्षात घेऊ. मिळालेली तीन समीकरणे परत लिहू.

एका पुरुषाला मिळणारी रक्कम = ३ मुलांना मिळणारी रक्कम. (१)

एका स्त्रीला मिळणारी रक्कम = ४ मुलांना मिळणारी रक्कम (३)

ओ. अगदी जवळ आलोय. सर्व माहिती वापरली आहे का ? माहितीतील तिसरा घटक ?

हो बरोब्बर. प्रथम समीकरण २ लिहू , आणि त्यात समीकरण १, ३ मधून मिळालेली माहिती वापरून सोपे रूप देऊ.

सात पुरुषांना मिळणारी रक्कम + अकरा स्त्रियांना मिळणारी रक्कम + पांच मुलांना मिळणारी रक्कम = १४०

७ x (तीन मुलांना मिळणारी रक्कम) + ११ x (चार मुलांना मिळणारी रक्कम) + पाच मुलांना मिळणारी रक्कम = (२१ + ४४ + ५) मुलांना मिळणारी रक्कम = ७० मुलांना मिळणारी रक्कम

आणि ७० मुलांना मिळणारी रक्कम = १४० रु

एका मुलाला मिळणारी रक्कम = २ रु

एका पुरुषाला मिळणारी रक्कम = ३ x २ = ६ रु.

एका स्त्रीला मिळणारी रक्कम = ४ x २ = ८ रु .

जे हवे होते ते मिळाले !!

आपण अगदी पद्धतशीर आपल्या आराखड्यातील पायऱ्यानुसार गणित सोडवले. क्रमाने विचारलेले प्रश्न सामान्य आकलनातून आलेले आहेत. मात्र हा आराखडा आपल्याला प्रश्नाला सुरुवात करायला आत्मविश्वास देण्यासाठी उपयोगी ठरला. आणि माहितीचा संपूर्ण उपयोग केला का - हा कळीचा प्रश्न त्यामुळे सुचला. हा आराखड्याचा

उपयोग आहे. काय काढायचे आहे ते सतत मनात ठेवून माहितीचे विश्लेषण, त्यात परत नियम आणि संख्यात्मक माहिती असा शांतपणे सुटा विचार केला. हा विचार करता करताच प्रश्न सोडवायची योजना समोर आली. आणि ती योजना अमलात आणताच उत्तर मिळाले!

परत एकदा लक्षात घ्या आराखड्यातील क्रमाने येणारे टप्पे, उत्तर शोधण्याच्या प्रवासात घडणाऱ्या मानसिक क्रियांचे वर्णन, नोंद आहे. त्यामुळे त्यांचे आकलन सहज होते मात्र आपण वारंवार करतो ती प्रक्रिया नीट सविस्तर समजून घेतली तर प्रश्न सोडवताना नक्कीच उपयोग होतो हे आपण बघितले. खरे ना?

क्रमशः

§§§

लेखक : किरण बर्वे, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान येथे गणित शिकवतात. विज्ञान व गणित विषयांत लेखन करतात. शैक्षणिक संदर्भ गटात सहभागी.

इ.मेल : barvekh@gmail.com

(कळीचे शब्द : गणित समजावून घेणे, गणित सोडविण्याचा आराखडा, त्यातील टप्पे)

महिन्यांची नावं कुठून आली?

लेखक : डॉ. नितीन हांडे



जानेवारी, फेब्रुवारी आणि सोमवारी, मंगळवारी..लहानपणी दोन्हीचा काहीतरी संबंध असेल असं वाटायचं. पण क्रमवार आणि सहावार, नववार यामधल्या वारांचा जसा एकमेकांशी काही संबंध नाही त्याच पद्धतीनं आठवड्याच्या वारांचा जानेवारी, फेब्रुवारी या महिन्यांच्या नावांशी काहीच संबंध नाही. खरं तर महिन्यांच्या नावांमध्ये जानेवारी, फेब्रुवारी हे दोन महिने निर्वासित आहेत, कदाचित म्हणूनच त्यांचं वेगळेपण आहे. त्याआधी, रोम्युलस राजाच्या रोमन कॅलेंडरनुसार युरोपात जेव्हा दहा महिन्यांचं वर्ष पकडलं जायचं, हे दोन महिने आणि त्यांची नावं अस्तित्वात नव्हती, तेव्हा नवीन वर्ष मार्च महिन्यापासून सुरू व्हायचं.

होय.. मार्च महिन्यापासून सुरू झालेलं वर्ष डिसेंबर महिन्यात संपायचं. आणि त्यापुढच्या काळात कडक थंडी असल्यामुळं पुढचे दिवस सोडून दिले जायचे. त्यांच्याकडे आधी ८ दिवसाचा आठवडा होता.. आणि ३८ आठवड्यांचं वर्ष. ३८ गुणिले ८ म्हणजे केवळ ३०४ दिवस होते का एका वर्षात?? नाही...वर्ष ३६५ दिवसाचेच होते, तरी बाकीचे ६१ दिवस हे चक्क सोडून दिलेले असायचे. कारण युरोपात एवढी कडाक्याची थंडी पडायची, की दैनंदिन व्यवहार ठप्प झालेले असायचे. आता देखील नाताळ म्हणजे येशूजन्म उत्सव होताना कडाक्याची थंडी असते.

वसंताची चाहूल लागली की, म्हणजे मार्च महिन्यात नवं वर्ष सुरू. नंतरच्या काळात जानेवारी आणि फेब्रुवारी हे महिने देखील कॅलेंडरमध्ये समाविष्ट झाले. अर्थात हे दोन महिने लेट आले पण थेट आले आहेत. सूर्य कुटुंबात उशिरा दाखल झालेल्या युरेनस आणि नेपच्यूनप्रमाणे साईडहिरो होऊन दुय्यम भूमिकेत पडले नाहीत, तर मुख्य हिरो झाले आहेत. त्यातही फेब्रुवारी हा तर कित्येकांचा आवडता महिना असेल, इतर महिन्यांपेक्षा दोन-तीन दिवस कमी काम करून तेवढाच पगार मिळतो.. शिवाय १४ फेब्रुवारीला आनंदी लोकं प्रेमदिवस साजरा करतात, आणि संस्कारी लोकं मातृपितृदिन. मला फेब्रुवारी सुरू झाला की वेध लागतात २८ फेब्रुवारीचे, अर्थात राष्ट्रीय विज्ञान दिवसाचे.

जानेवारी, फेब्रुवारी ही नावं कशी जन्माला आली असतील? सप्टेंबर, ऑक्टोबर यासारखी नाव घेताना केवळ आकड्यांचा आधार घेतला आहे. सप्टेंबर (मूळ नाव सेप्टीमस) आणि सप्तम, ऑक्टोबर (मूळ नाव ऑक्टोवस) आणि अष्ट, नोव्हेंबर (मूळ नाव नोनोज) आणि नवम तसेच डिसेंबर (मूळ नाव डेसिमस) आणि दशम यांचा संबंध तर

उघडपणे लक्षात येतो. लॅटिन आणि संस्कृत भाषा एकाच भाषेतून जन्माला आल्या असाव्यात. जगभर असं दिसतं की वर्षाच्या बारा महिन्यांची नावं ठेवताना पहिल्या चार-पाच महिन्यांची नावं जरा डोकं चालवून ठेवायची आणि नंतर कंटाळा करायचा आणि सातवा महिना, आठवा महिना म्हणून नाव चिटकवून टाकायचं. भारतामध्ये मात्र महिन्यांचं नाव देताना आकड्यांचा नाही, नक्षत्रांचा आधार आहे. प्रत्येक महिन्याला नक्षत्राचं नाव आहे.

भारतामध्ये चैत्र-वैशाख पासून माघ-फाल्गुनपर्यंत सर्व बारा महिन्यांचं बारसं त्या त्या महिन्यातील पौर्णिमेच्या चंद्राच्या स्थितीवरून केलं आहे. मात्र नक्षत्रांच्या स्त्रीलिंगी नावाचं महिन्याच्या नावात रूपांतर करताना त्याचं पुरुषीकरण करण्यात आलं आहे. चैत्र महिन्यामध्ये पौर्णिमेला चंद्र चित्रा नक्षत्रात असतो तर वैशाख पौर्णिमा असते तेव्हा चंद्र विशाखा नक्षत्रात असतो. (याबद्दल अधिक माहितीसाठी ही लिंक पहा.:-

https://richyabhau.blogspot.com/2020/10/blog-post_4.html)

जानेवारी नावामध्ये जानुस या देवाचं स्मरण करण्यात आलं आहे. जानुस हा



दोनतोंड्या रोमन देव. जसं आपल्याकडे दत्ताला तीन आणि ब्रम्हाला चार तोंड आहेत. ज्यांना परदेशी सिनेमे पहायची सवय आहे,

त्यांनी Janus Films चा लोगो आणि त्यातील दोन तोंडं असलेला माणूस पाहिला असेल.

जसं आपल्याकडं कामाचा श्रीगणेशा केला असं म्हणतात, तसं तिकडं चांगलं काम सुरू

करायचा देव म्हणजे हा जानुस. सुमारे २१०० वर्षांपूर्वी नववर्षाची सुरुवात करायचा मान या जानुसला देण्यात आला आहे.

मात्र त्याआधी ६०० वर्षांपूर्वी राजा पॉम्पिलीअसमुळे कालगणनेमध्ये जानेवारी आणि फेब्रुवारी जोडले गेले होते. मात्र तेव्हा पहिला महिना मार्च आणि शेवटचा महिना फेब्रुवारी मानला जायचा. फेब्रुआ म्हणजे शुद्धीकरण. वसंत ऋतुला सामोरं जाण्याआधी शरीराचं आणि मनाचं शुद्धीकरण करून घ्यावं अशी त्या काळात प्रथा होती, त्यानुसार फेब्रुवारी पौर्णिमेला हा शुद्धीकरण विधी केला जात असे. खरं तर या दोन महिन्यांची नावे जॅन्युअरी, फेब्रूअरी अशी आहेत, मात्र आपल्याकडे त्यांना वारी करून टाकले आहे. मार्च महिना हा खर तर मार्स म्हणजे मंगळाचा महिना. (मग त्याचं नाव पण मंगळवारी करायला हवं होतं की) आपल्याकडे केवळ कुंडलीत अडकून पडलेला कडक मंगळ तिकडं युद्धाची देवता आहे. या मंगळाचा म्हणजे मार्शसचा अपभ्रंश होऊन मार्चचा महिना तयार झाला आहे.

एप्रिल महिना हा शुक्र अर्थात व्हिनस देवीचा. तिची समकक्ष देवी (आपण अवतार म्हणतो तसं) एफ्रिलीसच्या नावावरून एप्रिल हे नाव पडलं आहे. पाश्चात्य संस्कृतीत शुक्र आणि मंगळ यांना स्त्री आणि पुरुषांचे प्रतिक समजलं जातं, त्यामुळे त्यांचे महिने लागोपाठ आले तर त्यात नवल ते काय! मे महिन्याचे नाव ग्रीक देवता माईया हिच्या नावावरून आलं



आहे. संतती प्रदान करणारी ही देवता. प्राचीन काळात असं मानलं जायचं की मे महिना प्रौढांसाठी, आणि जून महिना तरुणांसाठी उत्सवाचा.

जून महिन्याचं नाव जुनो या रोमन देवतेच्या सन्मानासाठी. जुपिटर या सर्वोच्च देवाची ही बायको. या दोघांच्या लेकीचं लग्न जून महिन्यात झालं होतं, त्यामुळे जून महिन्यात झालेली लग्न शुभ मानली जायची. जेव्हा वर्षात दहाच महिने होते, तेव्हा पहिल्या चार महिन्यांना नावं देऊन झाल्यावर नंतर लोकांनी कंटाळा केला आणि पुढच्या महिन्यांना क्विंटिलीज (पाचवा महिना) सिक्स्टिलीज (सहावा महिना) सप्टेंबर (सातवा महिना) ऑक्टोबर (आठवा महिना) नोव्हेंबर (नववा महिना) आणि डिसेंबर (दहावा महिना) अशी आकड्यावर बोळवण केली होती.

ज्युलियस सीझर हा योद्धा म्हणून जगप्रसिद्ध असला तरीदेखील कालगणनेमध्ये त्याचं योगदान खूप महत्त्वाचं आहे. त्याच्या काळातच लीप वर्षाची सुरुवात झाली. त्याआधी असलेल्या सदोष कालगणनेमुळे २१ मार्च रोजी वसंत सुरू व्हायच्या ऐवजी खूप आधी सुरू व्हायचा. दर चार वर्षांनी एक एक दिवस अलीकडे सरकत चालला होता. ज्युलियस सीझरने आधीचा अनुशेष भरून काढण्यासाठी इसवी सन पूर्व ४६ हे वर्ष ४४५ दिवसांचं जाहीर केलं. आणि तिथून पुढं इसवीसन पूर्व ४५ सालापासून चार वर्षांनी एक लीप वर्ष असलेल्या ज्युलियन कॅलेंडरची सुरुवात झाली.

तळे राखील तो पाणी चाखील या तत्त्वानुसार सीझरचा जन्म झाला होता तो क्विंटिलीज महिना जुलै नावाने ओळखला जाऊ लागला. ज्युलियस सीझरचा जेव्हा खून झाला, तेव्हा सीझरने आपल्या मृत्युपत्रात अनपेक्षितरित्या आपला वारस म्हणून

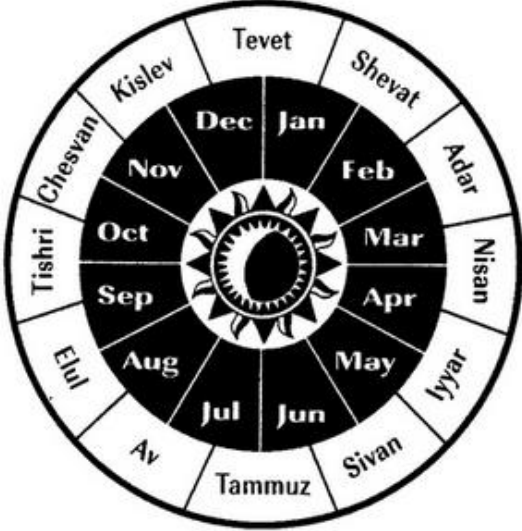
ऑक्टोवियस या नात्यातील एका मुलाला नेमल्याचे आढळले. त्यानं देखील मोठ्या सत्ता संघर्षाला सामोरं जात साम्राज्यावर आपली पकड मिळवली होती. (यावर Hotstar वर Roma नावाची भारी सिरियल आहे, नक्की पहा.) हाच ऑक्टोवियस पुढं सीझर ऑगस्टस म्हणून ओळखला जाऊ लागला. त्यानं आपलं नाव सिक्स्टीलीज महिन्याला दिलं आहे.

अर्थात त्याचा जन्म काही ऑगस्ट महिन्यात झाला नव्हता. केवळ सीझरशेजारी आपलं नाव देखील अजरामर व्हावं एवढी त्याची इच्छा होती. पण योगायोग पाहा, त्याचा मृत्यू ऑगस्ट महिन्यात झाला. एक दंतकथा सांगितली जाते की ऑगस्ट महिन्यात आधी २९ दिवस होते मात्र आपला महिना देखील सीझर एवढाच मोठा असावा म्हणून ऑगस्टसने त्यात दोन दिवस वाढवण्यासाठी फेब्रुवारी मधले दोन दिवस कमी केले. आणि ऑगस्ट ३१ तर फेब्रुवारी २८ दिवसाचा झाला अशी कथा सांगितली जाते. अर्थात अनेक संशोधकांनी सिद्ध केलं आहे की सिक्स्टीलीज अर्थात ऑगस्ट महिना आधीपासूनच एकतीस दिवसाचा होता, उशिरा घरी परतलेल्या भावंडाला जसं उरलंसूरलं खावं लागतं, तसं फेब्रुवारीला उरलेसुरले दिवस वाट्याला मिळाले आहेत.

३६५ दिवसांचे गणित जगभरातील अनेक संस्कृतीत हजारो वर्षे आधी सोडवलं होतं. हिब्रू कॅलेंडरमध्ये ३५४ दिवसांचं चंद्रवर्ष आणि ३६५ दिवसांचे सूर्यवर्ष यांच्यामधील फरक अचूकपणे शोधून १९ वर्षांत ७ अधिक मासाचं नियोजन केलं होतं. मात्र त्यांनी या अधिक महिना असलेल्या वर्षाला 'लीप वर्ष' हे नाव दिलेलं असून याला ते गरोदर वर्ष म्हणतात. हे नाव भारी आहे राव.. एकच महिन्याच्या पोटात दुसऱ्या महिन्याने जन्म घेतलेला आहे ना इथे. हिब्रू कॅलेंडरमध्ये शेवटचा महिना अदर असतो, त्याआधी हा

अधिक महिना पकडला जातो त्याला अदर I असं नाव दिलं आहे. निसान या महिन्याने ज्यू वर्षाची सुरुवात होते, या महिन्यासोबतच अविष ऋतू सुरू होतो. तेल अविष नावामध्ये तोच अविष आहे बरं का..!

अविष म्हणजे वसंत ऋतू. 'वसंत ऋतूपासून नवं वर्ष सुरू' ही संकल्पना



जगभराप्रमाणे इथे पण आढळून येते. हिब्रू कॅलेंडरमधील महिन्यांची बहुतेक नावं बाबिलोईन संस्कृतीमधून आली आहेत आणि त्यांचा शेतीशी, पिकाशी संबंध आहे. पहिला महिना 'निसान' म्हणजे पहिलं फळ. 'अयार' हा दुसरा हिब्रू महिना, याचा अर्थ होतो प्रकाश.

तिसरा महिना 'सिवन' ज्याचा अर्थ आहे पेरणीचा महिना. चौथ्या महिन्याचे नाव आहे 'तुमुझ', जे मेसापोटियन देव डूमुझिड याच्या नावाचा अपभ्रंश आहे. पाचवा महिना 'अव', अबुचा महिना म्हणजे हा पितृमास. (हा महिना साधारण जुलै ऑगस्टमध्ये येतो म्हणजे आपल्या दोन महिने आधी हे लोक पित्रं घालून मोकळे होतात की काय!) सहावा महिना 'एलुल', सुगीचा महिना असा या नावाचा अर्थ.

सातवा महिना 'तिशरी', ज्याचा अर्थ आहे सेकंड इनिंग. म्हणजे वर्षाचा उत्तरार्ध नव्या जोमाने सुरू करायचा. आठव्या महिन्याचं बारस करताना त्यांनी आळस केला आणि 'शेश्वन' म्हणजे आठवा महिना म्हणून त्याला सरळ सोपं नाव दिलं. हा महिना बोरिंग..कारण एकपण सण त्यामध्ये नाही. नववा महिना 'कीस्लेव', हा काही कीस

(बटाट्याचा) घ्यायचा महिना नाही. हा आहे आशेचा, सकारात्मकतेचा महिना. दहावा महिना 'तेवेत', ज्याचा शब्दशः अर्थ चिखलाचा महिना असा असला तरी जेव्हा डिसेंबर मध्ये तेवेत हा महिना सुरू असतो, तेव्हा बर्फाचा खच पडलेला असतो, आणि घरातील फायर प्लेस २४ तास तेवत ठेवायला लागते. अकरावा महिना 'शेवत', ज्याचा अर्थ प्रचंड मोठा पाऊस. बारावा महिना 'अदर' ज्याला अधिक महिन्याचा मान देऊन त्याचा आदर वाढवला आहेच.

चिनी संस्कृती देखील सिंधू आणि बाबीलोईन संस्कृतीप्रमाणे प्रगत होती. या



संस्कृतीने सूर्य आणि चंद्र यांचे गणित अचूक सोडवलां होतं. सुमारे तीन वर्षांनंतर एका अधिक मासाचं प्रयोजन तिथं देखील होतंच. त्यांच्याकडे महिन्यांची नावां देताना राशींचा विचार केला आहे. आपल्याकडे जशा बारा राशी, तशा त्यांच्याकडे पण आहेत. मात्र त्यांना या तारकांमध्ये वेगळे प्राणी दिसले

आहेत. सूर्य एखाद्या महिन्यात ज्या राशीत असेल, त्या राशीचं नाव त्या त्या महिन्याला देण्यात आलं आहे. अनुक्रमे वाघ, ससा, ड्रॅगन, साप, घोडा, बकरी, माकड, कोंबडी, कुत्रा, डुक्कर, उंदीर, बैल यांचा एक एक महिना पूर्ण होऊन वर्ष पूर्ण होत असे. मात्र आता ही नावां नव्या पिढीच्या विस्मृतीत जात असून पहिला महिना, दुसरा महिना असं आकड्याशी संबंधित नाव लक्षात ठेवणंच या पिढीला सोपं जात आहे.

रमजानचा सण कधी उन्हाळ्यात येतो कधी हिवाळ्यात. कारण इस्लाममध्ये केवळ चंद्राधारित कॅलेंडर स्वीकारलं आहे, त्याची सूर्याशी सांगड घातली नाही. इस्लाम स्थापन होण्यापूर्वी तिथं अधिक महिना पकडला जात होता, आणि सूर्य चंद्राचा हिशोब जुळवला जात होता. मात्र प्राचीन काळी प्रगत झालेलं कालमापन पोथीमध्ये बंदिस्त झाल्यामुळं आज त्यांची सांगड आधुनिक कालगणनेशी घालता येत नाही. नव्याने घालून दिलेल्या इस्लामी कालगणनेमध्ये दिवस किंवा महिने वाढविण्याची जुनी रीत पैगंबराने इस्लामबाह्य ठरवली.

मुहर्रम, सफर, रबिलावल, रबिलाखर, जमादिलावल, जमादिलाखर, रजत, साबान, रमझान, शव्वाल, जिल्काद, जिल्हेज असे बारा महिने दर २९.५ दिवसाच्या अंतराने येत राहणार. पहिला महिना ३० तर दुसरा २९ दिवसाचा. असा क्रम राहणार आणि ३५४ दिवसानंतर वर्ष पूर्ण होणार. पुढील इंग्रजी वर्षात हिजरी वर्ष ११ दिवस अलीकडे सरकणार. पैगंबराने आपल्या अनुयायांसह मक्केहून मदिनेकडे प्रयाण केलं आणि तिथं उम्मा म्हणजे मुस्लिम समुदायाची स्थापना केली ह्या घटनेस हिजरा असं म्हणतात आणि ही घटना घडली तेव्हापासून हिजरी कालगणना सुरू झाली.

इंग्रजी वर्षानुसार इ.स. ६२२ पासून ही कालगणना सुरू आहे. जसा भारतीय शके आणि इसवीसन यांच्यात ७८ वर्षांचा फरक आहे, जो लाखो वर्षांनंतर देखील तसाच राहिल. मात्र हिजरी आणि इसवीसनामधील अंतर प्रत्येक वर्षी ११ दिवस याप्रमाणे कमी होत जाणार. जानेवारी २०२२ मध्ये हिजरी १४४३ वर्ष सुरू होतं. म्हणजे सुरुवातीला असलेला ६२२ वर्षांचा फरक आता केवळ ५७९ वर आलेला आहे. अजून वीस हजार

वर्षामध्ये हा फरक शून्य होऊन नंतर हिजरी वर्ष इसवीसनाच्या पुढं ओव्हरटेक करून गेलेलं असेल.

हिजरी कालगणना तुम्हाला लवकर म्हातारी करते. तुम्ही जर इंग्रजी किंवा मराठी कालगणनेनुसार ३२ वर्षांचे असाल तर हिजरी कालगणनेनुसार तुम्ही ३३ वर्षांचे झाले असाल. इथं तुमची आयुष्याच्या ९७ व्या वाढदिवसानंतर वर्षी विकेट पडली असेल, तरी हिजरी कालगणनेनुसार तुम्हाला शतकवीर समजण्यात येतं. नेहमीच्या ३२ वर्षांमध्ये ३३ हिजरी वर्ष होतात. म्हणजे एक वर्ष जास्त कर भरावा लागतो. यावर मात करण्यासाठी अकबराने हिजरी ऐवजी 'फसली' नावाची सौर कालगणना सुरू केली होती, जिचा आधार हिंदू कालगणना पद्धती होती. शहाजहानच्या काळात ही कालगणना दख्खनेत आली आणि त्यानंतर हैदराबादच्या निजामाने देखील वापरली. अजूनही तिचा वापर ठरावीक ठिकाणी केला जातो.

<https://drnitinhande.in/महिन्यांची-नावं-कुठून-आल/वरून साभार.>

§§§

लेखक : डॉ. नितीन हांडे, अंधश्रध्दा निर्मूलन समिती कार्यकर्ता, 'ज्ञानाचा प्रवाहो चालीला' पुस्तकाचे सहलेखक, 'डावकिनाचा रिच्या' या टोपणनावाने ब्लॉग लिहितात.

इ. मेल : dr.nitin.hand@gmail.com

(कळीचे शब्द : महिन्यांच्या नावांचा उगम, ज्युलियन कॅलेंडर, ज्युलियस सीझर, भारतीय कालगणना, हिब्रू कालगणना, हिजरी कालगणना, चीनी कॅलेंडर)

वर्तमानाची पायाभरणी - १

लेखक : प्रियदर्शिनी कर्वे

मागच्या काही लेखांमधून आपण भटक्या टोळ्यांपासून परस्परसंबंधांची बरीच गुंतागुंत असलेल्या नागरी समाजव्यवस्थेकडे झालेल्या संक्रमणांचा विविध अंगांनी विचार केला. शेवटचे हिमयुग संपल्यापासून जगाच्या विविध भागातील समाजांची वाटचाल वेगवेगळ्या मार्गांनी पण बरीचशी एकाच दिशेने झालेली दिसते. माणसांच्या सामूहिक ज्ञाननिर्मितीचा यात मोठा वाटा होता हेही आपण पाहिले. आता आज आपण ज्या मानवी समाजव्यवस्थेचा भाग आहोत तिचा पाया कसा रचला गेला हे पाहूया.

महा इतिहासाच्या दृष्टिकोनातून पृथ्वीच्या संसाधनांवर माणसांचे नियंत्रण प्रस्थापित होणे हे आजच्या जागतिक समाजव्यवस्थेचे महत्त्वाचे वैशिष्ट्य आहे. तसे पाहिले तर आपण शेती आणि पशुपालन सुरू केले तेव्हाच आपण पृथ्वीवरील काही सजीवांच्या जीवनचक्रांवर नियंत्रण प्रस्थापित केले होते. पण इतरही संसाधनांवर कब्जा करण्याची प्रक्रिया साधारण इसवी सनाच्या पहिल्या सहस्रकात सुरू झाली असे ठोबळमानाने म्हणता येईल. या प्रक्रियेची बीजे शेतीप्रधान नागरी संस्कृतीच्या वैशिष्ट्यांमध्ये (मागील लेखात याची चर्चा केलेली आहे) रुजली होती, पण पहिल्या सहस्रकाच्या प्रारंभी अचानक काही प्रक्रियांनी वेग पकडला.

याच काळात जगाच्या वेगवेगळ्या भागांतील मानवी समाजांमध्ये काही वेगवान बदल का झाले? यामागील एक प्रमुख कारण होते जागतिक हवामानातील बदल. साधारण

इ. स. ८०० ते १२०० दरम्यान जागतिक पातळीवर काहीसे उष्ण वातावरण होते. याला मध्ययुगीन उष्ण्याचा कालखंड (मेडिव्हल वॉर्म पिरियड) म्हणतात. बऱ्याच ठिकाणी याचा परिणाम म्हणून पावसाचे प्रमाण वाढले. यामुळे अन्नधान्याचे उत्पन्न वाढून सुबत्ता वाढली व लोकसंख्याही वाढली. परिणामतः एकीकडे शहरीकरण वाढले तर दुसरीकडे शेती व पशुपालनाखाली आणखी जमीन आणली गेली. एकंदरीतच जगभरातील मानवी समूहांसाठी हा एक भरभरटीचा व समृद्धीचा कालखंड होता असे म्हणता येईल.



अंकोर वाट, कंबोडिया देवालय समूह (स्रोत – विकीपिडिया)

याच काळात युरोपातील स्कॅंडिनेव्हियन भागात शेती व पशुपालनाची संस्कृती पसरली, त्यामुळे लोकसंख्या वाढली व तिथल्या व्हायकिंग लोकांनी स्थलांतर करायला सुरूवात केली. यातून आणखी काही नवे भूभाग वसवले गेले. या काळात संपूर्ण आफ्रो-युरेशियात अनेक नवीन शहरे उदयाला आली. कंबोडियातील अंकोर वाट हा विशाल मंदीर समूह याच काळात उभा राहिला आणि युरोपातील भव्य गिरजाघरांची निर्मितीही याच कालखंडातील आहे. १२०० नंतर मंगोल लोकांनी जगातले तोपर्यंतचे सर्वात मोठे साम्राज्य

प्रस्थापित केले. त्याची पायाभरणी याच कालखंडात झाली. केवळ आफ्रो-युरेशियाच नाही तर जगाच्या इतर भागातही या कालखंडात एकंदरच समृद्धी वाढल्याची लक्षणे दिसून येतात. उदा. अमेरिका खंडाच्या दोन भागांत याच कालखंडात नवी विशाल साम्राज्ये उदयास आली.

लोकसंख्या वाढ, सुबत्ता व शहरांची वाढ यामुळे नागरी संस्कृतींमध्ये अंतर्गत व इतर संस्कृतींबरोबर आधीच्या कालखंडात प्रस्थापित झालेली संपर्काची जाळी विस्तारत गेली व अधिक गुंतागुंतीचीही बनली. ही केवळ वस्तूच नाही तर विचार व कल्पनांच्या देवाणघेवाणीची जाळी होती. १०० माणसे एकमेकांच्या संपर्कात असताना होणारी देवाणघेवाण यापेक्षा १ लाख माणसे एकमेकांच्या संपर्कात आल्यावर होणारी देवाणघेवाण निश्चितच जास्त असते. त्याचबरोबर एकत्र येणारे लोक वेगवेगळ्या कला किंवा कौशल्यांमध्ये पारंगत असलेले असतील, वेगवेगळ्या सांस्कृतिक अनुभूतींसह एकत्र येत असतील, तर होणारी विचारांची देवाणघेवाण निश्चितच अधिक बहुआयामी असते, आणि ती नव्या कल्पना व आविष्कारांना चालना देते. यातूनच जगाच्या विविध भागांचा संपर्क वाढवणाऱ्या तंत्रज्ञानाच्या निर्मिती व वापराला चालना मिळाली व त्याचाही या अधिक वेगाने होणाऱ्या सामूहिक ज्ञाननिर्मितीच्या प्रक्रियेला हातभार लागला.

इसवी सनाच्या पहिल्या सहस्रकापर्यंत बहुसंख्य लोक खुश्कीच्या मार्गाने व चालत प्रवास करत होते. काहीसे धनवान लोक घोडे, उंट अशा प्राण्यांवर सवारी करत होते. त्यामुळे त्यांना चालणाऱ्यांपेक्षा अधिक सामान नेता येत होते व त्यांचा प्रवासाचा वेगही अधिक होता. या प्राण्यांनी ओढण्याच्या गाड्या हाही पर्याय होता, पण चाकांच्या साहाय्याने प्रवास व वाहतूक करण्यात चांगले रस्ते नसणे हा एक महत्त्वाचा अडसर होता.

जसजशी साम्राज्ये विस्तारू लागली तशी शासनकर्त्यांनी आपल्या सैन्याच्या जाण्यायेण्यासाठी म्हणून का होईना पण चांगले रस्ते बांधण्यामध्ये गुंतवणूक केली. उदा. रोमन साम्राज्याने काही शतकांमध्ये जवळजवळ ८०,००० कि.मी. लांबीचे रस्ते बांधले आणि यातले काही अजूनही टिकून आहेत. या साऱ्यामुळे जमिनीवरून प्रवासाचा आवाका वाढू शकला. याच जोडीला

विविध प्रकारच्या नावांची व जहाजांची निर्मिती होऊ लागली व जलमार्गाने - नद्यांमधून तसेच सागरी - वाहतूकही वाढू लागली.



अरबी गलबताचे तैलचित्र (स्रोत - विकीपिडिया)

चांगल्या सुदृढ अशा दोन

घोड्यांनी ओढण्याच्या मध्ययुगीन गाड्यांद्वारे साधारण १ टनापर्यंत माल वाहून नेला जात होता. पण मौसमी वाऱ्यांच्या मदतीने हिंद महासागरात प्रवास करणाऱ्या अरबी गलबतांची मालवाहतुकीची क्षमता याच्या शंभर पट होती. या साऱ्यामुळे साम्राज्यांचे विस्तार होऊ लागले आणि व्यापारउदीमानिमित्त अधिकाधिक लोक अधिकाधिक अंतर प्रवास करू लागले.

सामूहिक ज्ञाननिर्मितीसाठी महत्त्वाची असणारी आणखी एक गोष्ट म्हणजे उपलब्ध माहितीची साठवणूक. केवळ मौखिक ज्ञानाच्या देवाणघेवाणीवर मर्यादा असतात. शेती, पशुपालन, व्यापार व शहरी राजेशाहीच्या उगमाबरोबरच उत्पन्नाच्या, देवाणघेवाणीच्या व करसंकलनाच्या नोंदी ठेवण्याच्या गरजांमधून अनेक संस्कृतींनी लेखनकला विकसित

करण्यास सुरुवात केली होती. पण हे एक विशिष्ट सामाजिक समूहांमध्येच सीमित असलेले कौशल्य होते. चीनमध्ये लागलेला कागदाचा शोध इतरत्र पसरण्यापूर्वी लिहिण्यासाठी माध्यम म्हणून पापायरस किंवा चामड्याचा वापर करावा लागे. ही माध्यमेही सहजगत्या उपलब्ध होणारी नव्हती. प्रत्येक शब्द हाताने लिहावा लागत असल्याने माहितीचे संकलन किंवा धार्मिक आज्ञांचे दस्तावेज किंवा कल्पनाविष्कार असणाऱ्या कथा-कादंबऱ्या-काव्ये इ. साहित्य मर्यादित लोकांपर्यंतच पोहचू शकत होते. दगडांवर कोरून छाप बनवून त्यांच्या साहाय्याने एकाच मजकुराच्या अनेक प्रती कागदांवर छापण्याचे तंत्र चीनमध्ये विकसित झाले. कोरियन लोकांनी यासाठी लाकडाचे छाप बनवण्यास सुरुवात केली. खिळे जुळवून छपाई करण्याचे पहिले छपाईयंत्रही कोरियात साधारण अकराव्या शतकात तयार झाले. एकंदरच पहिल्या सहस्रकाच्या सुरुवातीपर्यंत पुस्तके हा ज्ञानाचा अनमोल आणि दुर्मीळ ठेवा होता. कागदाचा वापर व छपाईचे तंत्र यामुळे ही परिस्थिती हळूहळू बदलू लागली.

जसजशी जगाच्या विविध भागांमध्ये लोकसंख्या वाढत गेली, प्रत्येक ठिकाणच्या समाजव्यवस्थेत कामांचे व राहणीमानांचे वैविध्य वाढत गेले, विविध समूहांच्या संपर्काच्या संधी विस्तारत गेल्या, तसतशी विविध प्रकारच्या विचारांची - धर्माशी, मूल्यांशी, कलेशी, तंत्रज्ञानाशी संबंधित - देवाणघेवाणही वाढत गेली. व्यापाराची केंद्रे म्हणून उभी राहिलेली शहरे अशा प्रक्रियेत महत्त्वाची भूमिका बजावतात. पहिल्या सहस्रकाच्या आरंभीच्या काळात आफ्रो-युरेशियात रेशीम मार्गाच्या केंद्रस्थानी असलेल्या मध्य आशियातील शहरे ही संपूर्ण आफ्रो-युरेशियासाठी ज्ञानाच्या देवाणघेवाणीची मुख्य केंद्रे बनली ती यामुळेच. इ.स. १०० मध्ये बगदाद शहरात साधारण १०० पुस्तकविक्रेते होते. अकराव्या शतकाच्या

सुरूवातीला कैरो येथील ग्रंथालयात १ कोटीहून अधिक पुस्तके होती आणि त्यात बरीचशी कागदावर लिहिलेली किंवा छापलेली होती. याचवेळी जर्मनीत युरोपातील जे सर्वात मोठे ग्रंथालय होते तिथे फक्त ४५० पुस्तके होती आणि ती सगळी पापायरसवर हाताने लिहिलेली होती. याच काळात बुखारा व समरकंद ही शहरे जागतिक पातळीवरील विज्ञान व तंत्रज्ञानाच्या अभ्यासाची व प्रगतीचीही महत्त्वाची केंद्रे बनली, तीही व्यापारी मार्गांवरील त्यांच्या भौगोलिक स्थानामुळेच.

शेती व पशुपालनावर आधारित नागरी संस्कृतींमध्ये वस्तू व सेवांची देवाण-घेवाण ही व्यापारापेक्षा जुलूमजबरदस्तीतून अधिक होत होती. पण जसजशी सुबत्ता वाढू लागली तसतसा व्यापार वाढू लागला. विशेषतः आपल्या साम्राज्याच्या अधिपत्याबाहेरील भागातून एखादी गोष्ट मिळवायची असेल तर युध्दखोरीपेक्षा व्यापार अधिक किफायतशीर आहे हे सम्राटांच्या लक्षात येऊ लागले. कदाचित याच कारणांमुळे आंतरराष्ट्रीय व्यापारी केंद्रे ही साम्राज्यांच्या सीमारेषांवर उभी राहिली. वस्तूंच्या किंवा सेवांच्या देवाणघेवाणीऐवजी चलनांचा वाढता वापर हेही आंतरराष्ट्रीय व्यापार वाढवण्यासाठी महत्त्वाचे ठरले. इ.स. १००० पर्यंत संपूर्ण युरेशियात व्यापारासाठी चलनी नाण्यांचा वापर सर्रास होऊ लागलेला होता. एकमेकांमध्ये विश्वास निर्माण झालेल्या व्यापाऱ्यांद्वारे कागदावर आपण एकमेकांना किती देणे लागतो हे लिहिलेल्या चिठ्ठ्यांची देवाणघेवाणही होऊ लागली व या चिठ्ठ्याही एकमेकांना विकता येऊ लागल्या. इ.स. १०२४ मध्ये जस्त व चांदीची टंचाई निर्माण झाल्याने चीनमधील सोंग सम्राटांनी सरकारच्या वतीने नाण्यांच्या ऐवजी अशा चिठ्ठ्या घायला सुरूवात केली. जिथे शासनकर्ते आपली देणी चुकवतील असा विश्वास होता तिथे अशा चलनी नोटांचा वापरही भरपूर होऊ लागला.

बराच काळ या व्यापाराच्या केंद्रस्थानी आफ्रो-युरेशियाच्या भौगोलिक केंद्रस्थानी असलेले मुसलमान जग होते. यामध्ये या भागाच्या भौगोलिक स्थानाचा वाटा होताच पण आणखी एक बाब याला कारणीभूत ठरली. शेतकरी व पशुपालकांच्या जगात व्यापार करणे सामाजिकदृष्ट्या कनिष्ठ मानले जात होते. पण प्रेषित महंमद स्वतः व्यापारी समाजातून आलेले असल्याने मुसलमान जगात व्यापार व व्यापाऱ्यांना जास्त प्रतिष्ठा होती. दहाव्या शतकापर्यंत हिंदी महासागर आणि भूमध्य समुद्र यांमधील व्यापार हा मुख्यतः कैरो व अलेक्झांड्रिया या मुस्लीमबहुल शहरांमधून होत होता.

दुसरे व्यापाराचे महत्त्वाचे केंद्र दक्षिण चीनमध्ये सॉंग सम्राटांच्या राजाश्रयातून उभे राहिले. या भागात राजाश्रय व वेगाने होणाऱ्या आर्थिक प्रगतीमुळे अनेक नवनवीन आविष्कार अकरा ते तेराव्या शतकांपर्यंत झालेले दिसतात. लोखंड आणि तांब्यावर आधारित उत्पादन येथे मोठ्या प्रमाणावर होऊ लागले. बंदुकीच्या दारूचा वापर सुरू झाला. इतकेच नाही तर रेशीम कापड बनवण्याच्या प्रक्रियेच्या यांत्रिकीकरणाचाही प्रयत्न इथे या काळात झाला होता.

आफ्रो-युरेशियाच्या इतर भागांतही हळूहळू व्यापारी केंद्रे उभी राहिली. व्यापाराबरोबर पैसा आला आणि नागरीकरणाचा वेगही वाढला. चीन हा सर्वात जास्त शहरीकरण झालेला भाग होता. इ.स. १४०० मध्ये जगातील सर्वात मोठ्या २५ शहरांपैकी नऊ शहरे चीनमध्ये होती. जगातील सर्वात मोठी शहरे होती चीनमधील नानजिंग व दक्षिण भारतातील विजयनगर. त्या खालोखाल होते कैरो आणि पॅरिस. त्याचवेळी केवळ व्यापारातून उभी राहिलेली राजकीय शक्तीस्थाने म्हणता येतील अशी व्हेनिस व जिनोआ ही छोटी राज्येही मोठ्या साम्राज्यांना आर्थिक वर्चस्वासाठी टक्कर देत होती.

व्यापारीकरणाची ही प्रक्रिया एकमेकांशी जोडलेल्या आफ्रो-युरेशियाच्या भौगोलिक प्रदेशातच घडली का? तर अजिबात नाही. अमेरिका खंडातील मध्य अमेरिका व अँडीज पर्वतरांगा या दोन ठिकाणी शेती व पशुपालनावर आधारित नागरी संस्कृती प्रस्थापित झालेल्या होत्या. तिथेही साम्राज्ये उभी राहिली आणि त्यांमध्येही व्यापारी केंद्रे विकसित झाली. पण या दोन भागांचा एकमेकांशी फारसा संपर्क प्रस्थापित झाला नाही.

मात्र ही जागतिक भरभराट अल्पायुषी ठरली. १४व्या शतकापासून जागतिक वातावरण परत थंड होऊ लागले. पावसाचे प्रमाण कमी होऊन दुष्काळांचे प्रमाण वाढले. १३१५ पासून एकापाठोपाठ एक आलेल्या दुष्काळांनी मोठी मनुष्यहानी होऊन युरोपातील १५ टक्के लोकसंख्या कमी झाली. पण हे पुरेसे नव्हते की काय, म्हणून १३३० पासून पुढे युरोप, उत्तर आफ्रिका व पश्चिम आशियामध्ये प्लेगच्या प्राणघातक साथीने थैमान घातले. काही भागांमध्ये या आजाराने एकूण लोकसंख्येच्या ३०-३५ टक्क्यांपर्यंत लोकांचा बळी घेतला. युरोपच्या इतिहासात 'ब्लॅक डेथ' म्हणून ह्या संहारक साथीची नोंद आहे.



ब्लॅक डेथने मृत पावलेल्या अनेकांच्या शवांचे एकाच वेळी दफन केले जात आहे हे दृश्य दाखवणारे १३५३ सालचे चित्र (स्रोत - विकीपिडिया)

मोठ्या भूभागावर पसरलेल्या मानवी समूहांचा परस्परसंबंध वाढल्याने हा आजार झपाट्याने पसरला. यापूर्वीही कदाचित स्थानिक पातळीवर प्लेगच्या साथी येत असाव्यात, पण पूर्वी संपर्काचे जाळे मर्यादित असल्याने या आजाराचा इतका मोठा प्रसार झालेला नव्हता. त्यामुळे आता विस्तारित संपर्कजाळ्यामुळे प्रथमच आजाराची बाधा झालेल्या बहुसंख्य लोकांमध्ये त्याविरुद्ध प्रतिकार शक्तीही नव्हती. यामुळेच या आजाराला इतके लोक बळी पडले. एकंदरीतच पहिल्या सहस्रकात परस्पर संपर्काच्या जाळ्याचा झपाट्याने विस्तार झाला याचा हा आणखी एक पुरावा म्हणता येईल. त्याचबरोबर अशा विस्तारलेल्या संपर्कजाळ्यांचे सगळेच परिणाम सकारात्मक नसतात, हेही यातून दिसून येते. या प्लेगमुळे चौदाव्या शतकात आफ्रो-युरेशियाची लोकसंख्या एकदम कमी झाली व या भागाच्या आर्थिक भरभराटीला मोठीच खीळ बसली.

या लेखमालेसाठी संदर्भ म्हणून डेव्हिड ख्रिश्चन व सहकाऱ्यांनी लिहिलेल्या 'बिग हिस्टरी – बिट्विन नथिंग अँड एव्हरिथिंग' या पुस्तकाचा आधार घेण्यात आला आहे.

§§§

लेखक : प्रियदर्शिनी कर्वे, संचालक, समुचित एन्हायरो टेक, शैक्षणिक संदर्भ संपादक गटात सहभागी.

इ-मेल : pkarve@samuchit.com

(कळीचे शब्द: पहिले सहस्रक, मेडिव्हल वॉर्म पिरियड, आफ्रो-युरेशियातील व्यापारउदीम, चलनी नाणी व नोटा, ब्लॉक डेथ)

Sin 90 = 1 का?

(भाग - १)

लेखक : प्रा. मनोहर राईलकर

गणिताचे प्राध्यापक मनोहर राईलकर यांचे दिनांक ३१ ऑगस्ट २०२२ रोजी वयाच्या ९३व्या वर्षी वृद्धापकाळाने दुःखद निधन झाले. शैक्षणिक संदर्भशी त्यांचा अनेक वर्षे स्नेह होता आणि गणितातील विविध संकल्पनांवर त्यांनी आपल्या अंकामध्ये लेखन केलेले आहे. त्यांच्या स्मृतीस संदर्भ परिवारातर्फे अभिवादन. सरांना आदरांजली म्हणून शैक्षणिक संदर्भच्या ५४ व ५५व्या अंकांत दोन भागांत प्रसिद्ध झालेला त्यांचा हा लेख पुनर्प्रकाशित करित आहोत.

ह्या लेखाचं शीर्षक म्हणजे मुळात विद्यार्थ्यांचीच शंका आहे. पण, तीच शंका काही शिक्षकांनीसुद्धा विचारल्यानं त्यावर स्वतंत्र लेख लिहावेत, असा विचार केला. तुमच्यापैकी अनेकांच्या मनातही ही शंका उद्भवली असेलच ना?

शिक्षक : सर, येऊ का?

प्राध्यापक : वा ! येऊ का म्हणजे काय, या ना ! बरोबर हे सैन्य कुठलं?

शिक्षक : अहो आमच्या शाळेतली मुलं आहेत सगळी. त्यांना एक शंका आहे आणि मला काही तिचं निरसन करता आलं नाही, म्हणून तुमच्याकडे आणलंय. बरं का रे मुलांनो, अगदी बिनधास्त शंका विचारा सरांना. पहिल्या वेळी आधी आपले नाव सांगत जा.

प्राध्यापक : बोला, काय शंका आहे? आणि तुमचे सर म्हणाले त्याप्रमाणं अगदी न घाबरता शंका विचारा.

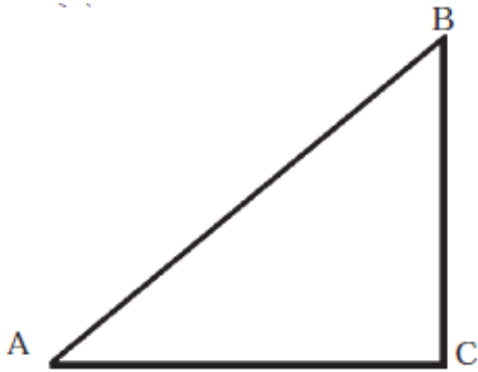
साधना : माझं नाव साधना. शंका अशी. आमच्या दुसऱ्या सरांनी त्रिकोणमिती वापरून त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाकरता एक सूत्र शिकवलं. $\frac{1}{2}(bc\sin A)$ असं. हेच सूत्र काटकोन त्रिकोणाकरताही चालतं असं त्यांनी म्हटलं. फक्त, $\sin 90 = 1$ घ्यायचं इतकंच म्हटलं आहे. पण त्याचं कारण सांगितलं नाही त्यांनी.

शेखर : मी शेखर. पण सर उत्तर मात्र बरोबर येतं. पण मग $\sin 90 = 1$ असं म्हणणं बरोबर आहे का?

साधना : त्रिकोणमितीची गुणोत्तरं तर फक्त लघुकोनांकरताच शिकवली आहेत आम्हाला.

शेखर : थांब ग साधना, सर, मी आधी आकृती काढतो.

प्राध्यापक : काढ ना. आकृती तर हवीच. त्याशिवाय समजूत चांगली कशी होईल?



शेखर : ABC असा त्रिकोण घेतला $C = 90$. मग प्रथम $\sin A = a/c$ अशी व्याख्या आम्हाला शिकवली, म्हणजे समोरील बाजू भागिले कर्ण. पण मला एक समजत नाही, $C = 90$ घेतल्यानंतर पुन्हा $A = 90$, कसा असू शकेल? एकाच

त्रिकोणात दोन काटकोन असूच शकत नाहीत.

प्राध्यापक : एकदम बरोबर. एका त्रिकोणात दोन काटकोन असूच शकत नाहीत, हा तुमचा आक्षेप अगदी बरोबर आहे.

शशिकांत : मी शशिकांत. पण सर आपण क्षेत्रफळाची जर $\frac{1}{2} (bc \sin A)$ ही व्याख्या घेतली आणि निराळी आकृती काढली तर...

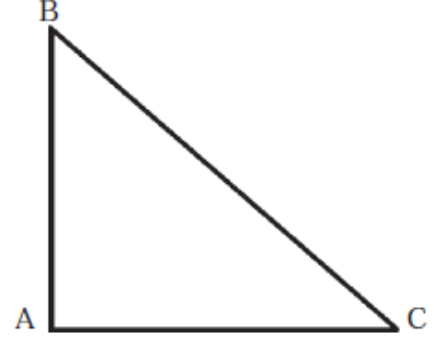
प्राध्यापक : बोल ना. आकृतीच काढ.

रेखा : मी रेखा. मी काढू का? (प्रा. मानेनं होकार देतात.) $A = 90$ घेतलं. मग $\sin 90 = 1$

मानलं की उत्तर बरोबर मिळतं. कारण, AB, AC ला लंब असल्यामुळे उत्तर बरोबर येतं. हे मला मान्य आहे.

पण सूत्र कसे वापरता येईल, ते मात्र कळत नाही.

कारण एकदा $C = 90$ घेतल्यावर...



प्राध्यापक : हा मुद्दा मगाशी शेखरनं मांडला आहे. पण, तुमची शंका आणि आक्षेप दोन्ही बरोबर आहेत. असं का मानायचं ह्याची दोन स्पष्टीकरणं मी तुम्हाला देईन. आज फक्त एक. दुसरं नंतर देईन.

प्रबोध : मी प्रबोध. पण, सर हेच सूत्र विशालकोनाकरता वापरता येईल का?

साधना : अरे वेडाबिडा आहेस का तू? काटकोन त्रिकोणाचा दुसरा कोन कधी विशाल असू शकेल का?

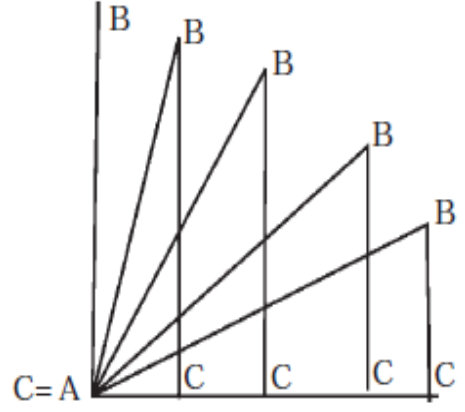
प्राध्यापक : थांब साधना जरा. काटकोन त्रिकोणाचा कोणताच कोन विशाल असणार नाही, हे तुझं म्हणणं बरोबर आहे. पण प्रबोध म्हणतोय तेही चुकीचं नाही बरं का मुलांनो.

सर्व : सर ! तुम्ही? तुम्ही असं म्हणता?

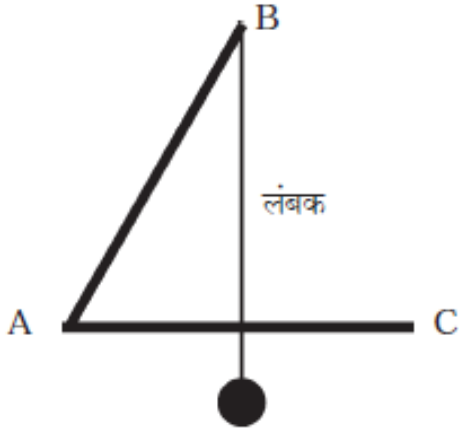
प्राध्यापक : सगळं काही नीट सांगतो ना समजावून. खरं तर त्याकरता एक प्रयोगच करायला हवा. प्रयत्न करतो समजावून सांगायचा. ही आकृती पहा.

अदिती : मी अदिती. सर हे काय केलंयत? एकेक अक्षर किती वेळा वापरलं आहे तुम्ही?

प्राध्यापक : जरा धीर धर. मी एकच अक्षर नाही वापरलं. तर एकाच रेषेच्या विविध अवस्था दाखवल्या आहेत. आणि अक्षरांच्या त्या त्या वेळच्या विविध जागा दाखवल्या आहेत. खरं तर हे सारं नीट चांगलं समजावून सांगण्याकरता मला एक साधन



सुचतंय. चला त्याचंही चित्र काढूया. AB आणि AC अशा दोन पट्ट्या घ्यायच्या आणि



त्या A पाशी फिरू शकतील अशा रीतीनं एकमेकींना अडकवायच्या. B पाशी एक खिळा मारून त्याला एक लंबक अडकवायचा. मग तुम्ही AC ही पट्टी आडवी ठेवून A भोवती AB जसजशी फिरवू लागाल, तसतशी वेगवेगळ्या स्थितीत ती आता पहिल्या

आकृतीप्रमाणं दिसू लागेल की नाही?

मंदार : मी मंदार. आता आलं लक्षात. म्हणजे तुम्ही A पासचा कोन हळूहळू वाढवीत नेणार.

प्राध्यापक : बरोबर. तुम्हाला सगळ्यांना कळलं ना मंदारचं म्हणणं? आता सांगा, जसजशी AB ही पट्टी उभ्या रेषेकडे येऊ लागेल, किंवा उभी होऊ लागेल म्हणा, तसतसा A कोन किती होऊ लागेल?

साधना : ९० अंशाचा होईल असं म्हणायचंय का तुम्हाला?

प्राध्यापक : शाबास साधना. तुम्हा सर्वांच्या लक्षात आलं का? खरं तर असं साधं उपकरण तुम्ही स्वतः केलंत, तर तुम्हाला चांगलं कळेल. आता आणखी एक प्रश्न. $\sin A = \frac{CB}{AB}$ = समोरील बाजू भागिले कर्ण, असं मगाशी शेखरनं म्हटलंच होतं, नाही का? मग पट्टी जसजशी उभी होऊ लागेल, तसतशी CB ची लांबी AB इतकी होऊ लागेल की नाही? आणि $C = A$ होईल की नाही?

मंदार : होय सर.

प्राध्यापक : मग $\frac{CB}{AB}$ ह्या गुणांतराचं काय होईल?

साधना : आलं लक्षात सर. त्याची किंमत जवळ जवळ १ होईल.

प्राध्यापक : बरोबर. म्हणजेच कोन जसजसा ९०च्या जवळ जवळ येऊ लागेल तसतशी त्याच्या Sin ची किंमत १च्या जवळ येईल म्हणूनच गणितज्ञांनी $\sin 90 = 1$ असं ठरवलं. लक्षात आलं का? अर्थात, हे स्पष्टीकरण तुम्हाला पटतंय की नाही, ते मला माहित नाही.

शेखर : अगदीच पटत नाही, असं नाही. पण नेमकं समाधान होत नाही.

प्राध्यापक : (हसतात) असंच पाहिजे. संपूर्ण समाधान होईतो, तुम्ही थांबताच कामा नये. मला आवडली तुमची वृत्ती.

रेखा : पण सर आमचं अगदी चांगलं समाधान होईल, असं स्पष्टीकरण देताच येणार नाही का?

प्राध्यापक : यायलाच हवं. नाही तर मग गणितात दोष राहतील नाही का? पण तूर्त ते बाजूला ठेवू आणि $\sin 90 = 1$ अशी व्याख्याच करू. फक्त ही व्याख्या अगदीच

कोणीतरी लहर म्हणून केली नाही, त्यामागं काही तरी सुसूत्र कारण आहे, हे तुमच्या लक्षात आलंय ना?

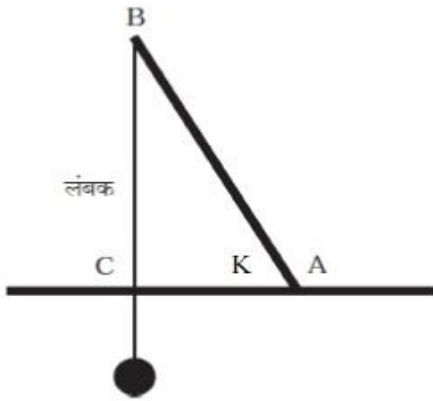
मुलं : होय सर, पण...

प्राध्यापक : तुमचं पूर्ण समाधान करण्याची जबाबदारी माझी. मग तर झालं? पण पुढच्या वेळी आता ह्याच उपकरणाच्या मदतीनं आपण विशालकोनाचासुद्धा विचार करू.

मंदार : म्हणजे सर विशालकोनाचाही विचार करता येईल ना? मला तेच वाटतं.

रेखा : जरा थांब रे. ह्या मंदारला धीर नाही मुळीच. पण, सर त्याकरता हे उपकरण नाही चालणार. पट्टी जरा लांब घ्यायला हवी.

प्राध्यापक : छान ! पण, सांग पाहू कशी ते.



रेखा : आकृती काढून दाखवते. ही बघा. बरोबर?

प्राध्यापक : फारच छान ! आता सांगा Aच्या शेजारच्या कोनाला आपण तूर्त K असं नाव दिलं तर त्याचं माप काय असेल?

शेखर : $180 - A$ ना?

प्राध्यापक : अगदी बरोबर. आता सांगा K कोन तर

लघु आहे की नाही?

मुलं : होय सर. म्हणजे त्याचा Sine काढता येईल ना?

प्राध्यापक : आणि तो किती येईल?

मोहिनी : मी मोहिनी. मी सांगू? $\sin K = CB / AB$ ना?

प्राध्यापक : बरोबर. मग ह्यावरून आपण $CB = AB \cdot \sin K$ असं लिहू शकतो ना? पण, पाया गुणिले उंची भागिले २ ह्या सूत्रानं ABC ह्या विशालकोन त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ $AC \cdot CB / 2$ असतं ना? (सर्व मुलं 'होय सर' म्हणतात.) मग आता सांगा त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ $AC \cdot AB \cdot \sin K / 2 = bc \sin K / 2$ हेच येतं की नाही?

मोहिनी : पण सर $\frac{1}{2} (bc \sin A)$ असं कुठं आलं?

प्राध्यापक : नाही ना आलं. ते येण्याकरता काय करायला हवं? K म्हणजे काय आहे?

शेखर : $K = 180 - A$ असंच ना?

प्राध्यापक : जर आता सूत्र पहिल्याप्रमाणंच असायला हवं तर त्यासाठी जर आपण विशालकोनाकरता...

मोहिनी : $\sin A = \sin (180 - A)$ अशीच व्याख्या केली तर?

प्राध्यापक : शाबास ! अशीच व्याख्या करायची. की मग त्रिकोणाच्या क्षेत्रफळाचं हे सूत्र, सर्वच प्रकारच्या कोनांकरता चालेल की नाही?

रेखा : नाही सर, माझं नाही समाधान झालं. ही बनवाबनवी वाटते. आपल्याला सोयीची अशी काही व्याख्या केलेली गणितात चालते, असा ह्याचा अर्थ होतो.

प्राध्यापक : सोयीची हे तुझं म्हणणं बरोबर. पण काहीही हे म्हणणं चूक. आपली नवी व्याख्या आपल्या जुन्या सर्व व्यवस्थेशी सुसंगत असली पाहिजे. तशी सोयीस्कर व्याख्या करायला गणितात मुभा आहे. त्यासाठी तुम्हाला मी एक उदाहरण देतो $a^0 = 1$ असं तुम्ही मानता का नाही? (सर्व मुलं मान डोलवतात.) का? अशीच का करायची? दुसरी कुठली किंमत का घ्यायची नाही? सांगता?

मंदार : त्यानं आपलं काम होतं.

प्राध्यापक : अगदी बरोबर. पण, खरं तर त्या आधी एक प्रश्न विचारतो. A^n मधील n काय आहे?

मंदार : n नैसर्गिक संख्या आहे का?

प्राध्यापक : बरोबर. आता a^2 , a^3 म्हणजे काय ते सांगा.

शेखर : $a^2 = a.a$, $a^3 = a.a.a$ बरोबर?

प्राध्यापक : बरोबर. A^2 मध्ये a , 2 वेळा आणि a^3 मध्ये a , ३ वेळा कारण आणि २, ३ ह्या नैसर्गिक संख्या आहेत. पण a^0 करता ० वेळा असं म्हणता येत नाही. कारण, ० वेळा a असं म्हणण्याला काही अर्थच नाही. तरीही आपण $a^0 = 1$ अशी व्याख्या केली. का? ह्यात काही सोय आहे. की बनवाबनवी केलीय? तुला काय वाटतं मोहिनी?

मुलं : आम्हाला माहित नाही, तुम्हीच सांगा सर.

प्राध्यापक : घातांकांच्या गुणाकाराचा पहिला नियम काय आहे?

शेखर : मी सांगतो. $A^m \cdot A^n = A^{m+n}$ हाच ना?

प्राध्यापक : आता मला $a^3 \cdot a^2 = a^{3+2}$ हे सिद्ध करून दाखवा.

शेखर : मी करतो. डावी बाजू $a^3 \cdot a^2 = (a.a.a).(a.a) = a.a.a.a.a = a^5$, असंच ना?

प्राध्यापक : अगदी बरोबर. हा नियम घातांक नैसर्गिक संख्यांकरता ठीक आहे. पण ह्यात एखादा घातांक ० घेतला तरी चालावं अशी अपेक्षा करून a^0 चा सोयीस्कर अर्थ लावला तर? वरच्या सिद्धतेत २ ऐवजी ० घाल पाहू आणि a^0 करता काय मानावं लागतं ते सांग पाहू.

शेखर : $a^3 \cdot a^0 = a^3$ आता आलं लक्षात $a^0 = 1$ असं का मानायचं ते.

प्राध्यापक : म्हणजे रेखा म्हणते तसं काहीही नव्हे. पण सोयीस्कर असल्यानं तसं ठरवलं आपण. काय सोय? $A^0 = 1$ ही व्याख्या आपल्या घातांकांच्या सार्वत्रिक नियमाशी सुसंगत आहे, ते कळलं का?

मंदार : सर तसं काटकोनाच्या आणि विशाल कोनाच्या sine करताही करता येतं, असं तुम्हाला म्हणायचंय का?

प्राध्यापक : का नाही म्हणू?

शेखर : आम्हाला समजेल? सांगाल?

प्राध्यापक : अवश्य. पण, एक लक्षात घ्या की परिस्थितीनुसार आपल्याला नेहमीच आपल्या व्याख्येत काही बदल, काही दुरूस्त्या किंवा विस्तार करणं भाग पडतं. कोनाकरता तसं काय करायचं ते आता पुढच्या वेळी पाहू.

लेखाचा दुसरा भाग वाचा पुढच्या आठवड्यात.

पूर्वप्रसिद्धी : शैक्षणिक संदर्भ अंक ५४ ऑक्टोबर - नोव्हेंबर २००८.

§§§

लेखक : मनोहर राईलकर, गणिताचे प्राध्यापक होते. गणित विषयावर अनेक पुस्तके प्रसिद्ध, अतिशय रंजक पद्धतीने गणित शिकवत असत.

(कळीचे शब्द : त्रिकोणमिती, लघुकोन व विशालकोन असलेल्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढण्याची सूत्रे)

Sin 90 = 1 का?

(भाग - २)

लेखक : प्रा. मनोहर राईलकर



गेल्या लेखात आपण $\sin 90 = 1$ का याचे उत्तर काटकोन त्रिकोणाच्या बाबतीत शिकलो.
विशालकोनाचेही तसेच असते का? एखाद्या गणिताचा वेगळ्या तऱ्हेनेही विचार करता येईल का?

प्राध्यापक : या मुलांनो. यावेळेला काय शंका आणली आहे?

शेखर : सर, तुम्ही विशालकोनाच्या Sine करता काय करायचं ते सांगणार ना आज?

प्राध्यापक : तर ! आता अगदी लहानपणी तुम्ही संख्या शिकलात तेव्हा तुम्हाला कुणी
नैसर्गिक संख्या असा शब्द वापरून संख्या सांगितल्या नव्हत्या.

मोहिनी : नाही सर, वरच्या वर्गात गेल्यावर अपूर्णाक, मग ऋण संख्या आणि आता अपरिमेय संख्या असे नवनवीन अर्थ संख्या ह्या शब्दाला का देतात, ते कळलं.

प्राध्यापक : बरोबर. तसंच कोनाचं आहे. सहासात वर्षांच्या, पहिली दुसरीतल्या मुलाला कोन म्हणजे काय, असं विचारलं, तर तो भिंतीचा कोपरा, पाटीचा कोपरा, वहीचा कोपरा, असं काही तरी दाखवील. कारण तोवर त्याच्या मनातील कोनाची कल्पना, तिथपर्यंतच पोचलेली असेल. पण, तुमची कल्पना त्याच्या थोडीशी पुढं गेली आहे. तरीही अजून ती परिपूर्ण झालेली नाही. म्हणूनच काटकोनाचा किंवा विशाल कोनाचा Sine कसा काढता येईल, असा प्रश्न तुम्हाला पडला आहे. म्हणूनच गेल्यावेळी मी बनवाबनवी केली असं रेखाला वाटलं.

रेखा : माझं चुकलं सर.

प्राध्यापक : तुझं मुळीच चुकलं नाही. गणितात तर नेहमीच अशी संशयी वृत्ती हवी. पटलं नाही तर मान्य करायचं नाही. अगदी शिक्षकांच्या म्हणण्यावर सुद्धा आक्षेप घेण्यात त्यांचा अपमान होत नसतो.

ते असू दे. काटकोनाचा Sine असा का हे त्या उपकरणाच्या मदतीनं पाहिलं. पण त्या मार्गानं विशाल कोनापर्यंत जाता आलं नाही. निदान तुमचं खरंखुरं पूर्ण समाधान होईल इथपर्यंत जाता आलं नाही. कारण आपण $\text{Sine } A = \sin (180 - A)$ का? ह्याचं चांगलं स्पष्टीकरण मागच्या वेळी दिलं नव्हतं. आज देता येईल.

मंदार : त्या करता काय करायला हवं?

प्राध्यापक : त्या करता आता आपल्याला कोनाचीच व्याख्या बदलायला हवी. मात्र, अगदी काटेकोर व्याख्या तुमच्या कक्षेत येणार नाही. म्हणून आपण विज्ञानाचा आधार घेऊ.

सुशांत : मी सुशांत. सर, कोनाची व्याख्या कशी बदलता येईल?

प्राध्यापक : खरं तर बदलणं हा माझा शब्द योग्य नाही. कोनाच्या व्याखेचा विस्तार असं म्हणू. संख्याकल्पनेचा विस्तार केला की नाही? तसंच. असो. तर, तुम्हाला घर्षण माहीत असेल. आणि हेही माहीत असेल की, शेतकऱ्याचा पोरगा खांबाला दोरखंडाचं वेटोळं घालतो, आणि त्याच्या मदतीनं माजलेल्या बैलालासुद्धा ओढून धरू शकतो. किंवा एकटा खलाशी काही लक्ष टनांचं जहाज धरू शकतो. कसं?

रेखा : घर्षणामुळं.

प्राध्यापक : ठीक. आता पुढचा प्रश्न. वेढे वाढले तर घर्षण कमी होईल की जास्त?

रेखा : अर्थातच जास्त.

प्राध्यापक : बरोबर जास्त वेढे तर जास्त घर्षण. आणि जास्त वेढे देण्याकरता मुलाला त्या खांबाला जास्त प्रदक्षिणा घालाव्या लागतील की नाही?

मुलं : होय सर.

प्राध्यापक : म्हणजेच जास्त कोनातून फिरावं लागेल की नाही?

मुलं : होय सर.

प्राध्यापक : म्हणजे तुम्ही कोनाचा काही तरी वेगळा अर्थ लावलात की नाही?

मुलं : होय सर.

प्राध्यापक : काय लावलात?

मंदार : खांबाभोवती आपण किती फिरलो त्यावरून ठरवलं.

प्राध्यापक : बरोबर. त्याच दृष्टीनं आता आपण कोनाच्या कल्पनेचा विस्तार करू. आणि अशा कोनांकरता त्रिकोणमितीही कशी बदलते, तेही पाहू.

साधना : म्हणजे आतापर्यंत आपण शिकलेली आपली सगळी त्रिकोणमिती फुकटच का?

प्राध्यापक : फुकट कशी? तुम्ही ऋण संख्या शिकलात तेव्हा नैसर्गिक संख्यांचं ज्ञान फुकट गेलं का? म्हणून तिचा विस्तार करायचा. तेच सांगतोय. मात्र तिथं एक काळजी घेणं जरूर आहे. कोनाचा किंवा त्रिकोणमितीचा विस्तार करताना मुळात आपल्याजवळ जे होतं ते फुकट घालवायचं नाही. नाही तर साधनाला वाटतं तसं आतापर्यंतचं ज्ञान फुकट जाईल.

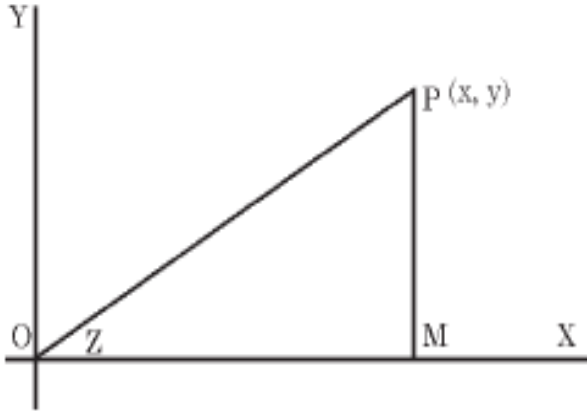
तर, त्यांचा मूलभूत अर्थ तोच राहिला पाहिजे म्हणजे नव्वद किंवा मोठ्या कोनांच्या त्रिकोणमिती गुणोत्तरांकरता कोनाची नवी व्याख्या दिली तरीसुद्धा लघुकोनांच्या गुणोत्तरांचा, त्या नव्या व्याख्येमुळं मिळणारा अर्थ आणि आधीचा अर्थ यांत फरक नसावा. तर आपण व्याखेचा विस्तार केला असं म्हणणं योग्य ठरेल.

समजा कोनाची नवीन व्याख्या दिली. आणि त्याचा Sine म्हणजे काय तेही ठरवलं. तर नव्या व्याख्येप्रमाणं मिळणारा लघुकोनाचा Sine आणि त्याचाच पूर्वीचा Sine म्हणजे समोरील बाजू भागिले कर्ण, यांची उत्तरं सारखी यायला पाहिजेत. तरच कोनाची

मूळची कल्पना आणि त्याची गुणोत्तरं ह्यांचा आपण विस्तार केला असं म्हणता येईल. नाही तर मग आधीचं फुकट जाईल. कळलं?

शेखर : ते कसं करता येईल?

प्राध्यापक : आपण आकृती काढू. तुम्हाला निर्देशक भूमिती माहित आहे ना? (सगळे होय म्हणतात.) परस्परांस लंब अशा दोन रेषा घेतात. आडव्या रेषेला X - अक्ष म्हणतात. आणि उभ्या रेषेला Y - अक्ष म्हणतात. छेदन बिंदूला आरंभबिंदू (O) म्हणतात.



बाकीचं तुम्हाला माहित असल्यामुळं अधिक चर्चा करित नाही. आता O मधून जाणारा असा, समजा r लांबीचा, एक रेषाखंड OP काढला. त्याच्या दुसऱ्या टोकाला P म्हणू. आता मुळात हा

रेषाखंड X - अक्षाशी, लांबीचा विचार सोडला तर, XO शी एकरूप होता असं समजू. मग तो घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेनं फिरू लागला आहे, असं समजू. तो जसजसा फिरेल तसतसे P चे सहगुणक बदलत जातील. आता मला सांगा, रेषाखंड मुळापासून किती फिरला की तो कोन आणि P चे निर्देशक यांच्यात एकास एक संबंध राहिल?

स्वाती : मी स्वाती. पण सर त्याची एक फेरी पूर्ण झाली की तो पुन्हा पहिल्याच जागी येईल आणि पुन्हा पुढं जाईल की. (प्रा. मान डोलवतात.) म्हणजे त्यांच्यांतला संबंध एकास एक कसा राहिल?

प्राध्यापक : नाहीच राहणार. पण तूर्त ते आपण बाजूस ठेवू. आणि फक्त एकाच फेरीला परवानगी देऊ. मग झालं? आता सांगा, की रेषाखंड OP कितीपासून कितीपर्यंत कोनातून फिरू शकेल?

सुशांत : ० ते ३६० अंशातून.

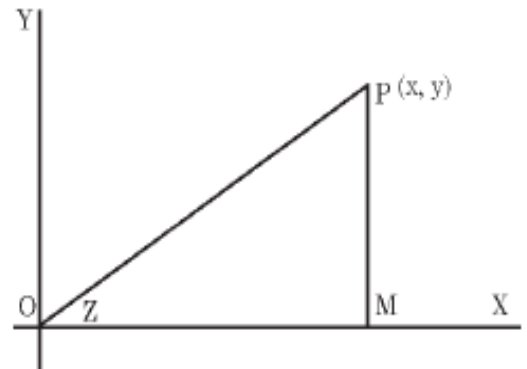
प्राध्यापक : आता P चे निर्देशक (x, y) मानू आणि कोनाला Z नाव देऊ. पुढं Z कोनाचा sine आणि cosine यांच्या व्याख्या $\cos z = x/r$, $\sin z = y/r$ ह्या प्रमाणं ठरवू. कळलं? आता असं पहा की कोन शून्य पासून ३६० पर्यंतच्या कोणत्याही किमती घेत असला तरी आपल्याला त्याची sine आणि cosine ही गुणोत्तरं मिळतील की नाही?

मुलं : होय सर, पण नव्या व्याख्येप्रमाणं. पण सर काही चरणांत निर्देशक ऋणसुद्धा असतील. त्याचं काय?

प्राध्यापक : असू देत. पण, ते नंतर पाहू. जेव्हा P पहिल्या चरणात असेल तेव्हा त्रिकोण OPD ह्या काटकोन त्रिकोणातून मिळणारी Z ची म्हणजेच OPX कोनाची त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं तशीच,

$\sin z = y/r =$ समोरील बाजू / कर्ण आणि

$\cos z = x/r =$ शेजारील बाजू / कर्ण, अशी पूर्वीसारखीच मिळतील की नाही? इथं पुन्हा तीच आकृती दाखवतो.



मुलं : होय सर. आलं लक्षात. म्हणून विस्तार झाला असं म्हणायचं ना?

प्राध्यापक : होय आणखी एक मुद्दा. कोन शून्यपासून ३६० पर्यंत काहीही असला तरी, $x^2 + y^2 = r^2$ हे पूर्वीचं नित्य समीकरण सदैव सत्य असल्यामुळं r^2 नं भागल्यास, $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$ हे सूत्र आपल्याला कोणत्याही कोनाकरता मिळतं.

स्वाती : पण सर, यावरून विशालकोन त्रिकोणाकरता क्षेत्रफळाचं सूत्र तेच राहतं हे कुठं आपण दाखवलं आहे?

प्राध्यापक : दाखवू ना ते आता. खरं तर आपण $\sin(180 - A) = \sin A$ इतकं दाखवलं तरी चालेल. कारण मागच्या वेळी आपण तशीच व्याख्या केली होती. म्हणून, ती तशी का, ते दाखवलं तरी पुरेल. त्यापूर्वी तुम्ही आतापर्यंत न विचारलेला एक प्रश्न $\sin 0 = 0$ हेही पाह्यचं आहे ना?

मुलं : होय सर.

प्राध्यापक : पण, तुम्ही कुठं 'का?' असं विचारलंत (मुलं गप्प राहतात.) हरकत नाही. आता तुम्हाला कळेल. कोन $\text{POX} = 0$ समजा. मग कुठं असेल?

मुलं : x अक्षावर.

प्राध्यापक : मग त्याचे निर्देशक काय?

मुलं : $x = r$ आणि $y = 0$ असे असतील. आलं लक्षात. म्हणून आता $\sin 0 = y/r$ आणि $\cos 0 = 1$. आलं सारं लक्षात.

प्राध्यापक : तसंच $\sin 90$ चंही सांगता येईल. त्यावेळचे P चे निर्देशक सांगा.

साधना : $x = 0$ आणि $y = r$. आलं लक्षात.

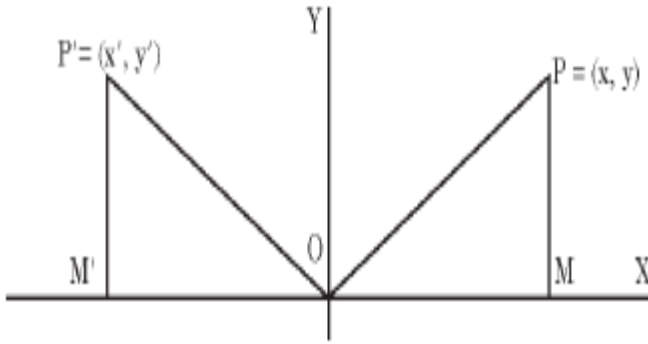
$$\sin 90 = r/r = 1$$

प्राध्यापक : आपण विशालकोन त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ, म्हणजे सूत्र काढू.

स्वाती : मी आकृती काढते.

प्राध्यापक : थांब जरा. मी वेगळीच आकृती काढतो ती पहा. $\angle POM = \angle P'OM'$

घेऊ. मग सांगा $\angle P'OM'$ आणि विशालकोन $\angle P'OM$ हे पूरक कोन आहेत की नाही?



स्वाती : होय सर, $\angle P'OM$, $\angle P'OM'$ पूरक आहेत. शिवाय आणखी $\angle POM = \angle P'OM'$ घेतलंच आहे.

प्राध्यापक : जर $\angle P'OM = z$ मानलं तर $\angle P'OM'$ किती?

मंदार : $180 - z$

साधना : सर माझ्या मनात एक कल्पना आहे. पण मला ते सिद्ध करता यायचं नाही. (पुढं बोल, अशी खूण प्रा. करतात.) आपल्या नव्या व्याख्येप्रमाणं एखादा कोन आणि त्याचा पूरक कोन याचं Sine गुणोत्तर समान येईल का?

प्राध्यापक : अग आपल्याला तेच हवंय ना? बरं P, P' ह्या दोन बिंदूच्या निर्देशकांत काय संबंध आहे, ते सांगू शकाल का?

स्वाती : मी सांगते सर. $x' = -x$ (minus x), पण $y' = y$

प्राध्यापक : मग...

साधना : आता आलं लक्षात. $y' = y$ असल्यामुळंच दोघांची गुणोत्तरं Sine सारखी येतात.

प्राध्यापक : शाबास साधना ! अगदी बरोबर ओळखलंस. पण रेखा, आपण काहीही व्याख्या केली नाही, हे कळलं का?

रेखा : होय सर. P, P' यांचे y - निर्देशक सारखे आहेत म्हणून येतं ना?

प्राध्यापक : बरोबर. आणखी एक. आपल्या नव्या व्याख्येनुसार त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं नेहमी धनच असतील असं नव्हे. मगाशी तुम्ही कुणीतरी म्हटलंच. त्यामुळं फक्त लघुकोनांची गुणोत्तरं विचारात घेतली तर ती दोन्ही प्रकारांत सारखी येतील आणि तशी यायला हवीतच ना? कारण आपण आपल्या कल्पनेचा विस्तार करू पहात आहोत की नाही? आता $\cos 0$ झालं, $\cos 90$ सांगा.

स्वाती : $\cos 90 = 0$

प्राध्यापक : बरोबर. कळलं ना सगळं?

शेखर : कळलं सर. हे स्पष्टीकरण मागच्या पेक्षा अधिक चांगलं आहे. पण, सर ऋण गुणोत्तराचं उदाहरण सांगता?

प्राध्यापक : ती तुम्ही सुद्धा सांगू शकाल.

कारण आपली त्रिकोणमितीय गुणोत्तरं P च्या निर्देशकांवर अवलंबून असतात आणि कोणत्या चरणात कोणते निर्देशक धन किंवा ऋण असतात, ते तुम्हाला माहितच आहे. सांगा पाहू.

सुशांत : पहिल्या चरणात दोन्ही धन. दुसऱ्या चरणात x ऋण आणि y धन. तिसऱ्या चरणात दोन्ही ऋण आणि चौथ्या चरणात y ऋण पण x धन.

प्राध्यापक : यानुसार sin आणि cos गुणोत्तरांची चिन्हं ठरवतील. आणि आता दुसऱ्या चरणात y धन असल्यामुळं sin गुणोत्तर धन आलं. त्यामुळं तर आपलं सूत्र सिद्ध झालं.

मंदार : कोणतं सर?

शेखर : अरे असं काय करतोस? $\sin(180 - A) = \sin A$ हे नाही का आपण दाखवतो आहोत? आणखी काय सर?

प्राध्यापक : आणखी खूपच आहे. एकच सांगतो. मगाशी स्वातीनं म्हटलं की संगती एकास एक नाही. पण ज्या दोन कोनांतलं अंतर 360 किंवा त्याच्या धन वा ऋण कोणत्याही पूर्ण पटीत असेल त्यांच्यात फरक करायचा नाही असं ठरवलं, की कोणत्याही कोनाची म्हणजे ऋण कोनांचीसुद्धा गुणोत्तरं मिळतील की नाही? हे मान्य केलं तर 30 , 330 , 690 ह्यांच्यातही फरक रहात नाही. घड्याळात, 13 आणि 1 , 14 आणि 2 यांच्यात आपण कुठं फरक करतो? म्हणजे ऋण कोनांचीसुद्धा गुणोत्तरं मिळतील की नाही? खरं तर वाटेल त्या कोनांची गुणोत्तरं मिळतील. जसे घड्याळात ऋण वाजत नाहीत तसे व्यवहारातही ऋण कोन येत नाहीत. पण गणितात येऊ शकतात. पण विस्तार म्हणजे काय कळलं ना?

मुलं : कळलं सर, चांगलंच कळलं. पण आम्ही नेहमी अशा शंका विचारायला आलं तर चालेल का?

प्राध्यापक : अवश्य. शंका विचारण्याचा तर तुमचा हक्कच आहे. आणि मला तर मुलांनी शंका विचारलेल्या आवडतातच.

पूर्वप्रसिद्धी : शैक्षणिक संदर्भ अंक ५५ डिसेंबर २००८ - जानेवारी २००९.

§§§

लेखक : मनोहर राईलकर, गणिताचे प्राध्यापक होते. गणित विषयावर अनेक पुस्तके प्रसिद्ध, अतिशय रंजक पद्धतीने गणित शिकवत असत.

(कळीचे शब्द : त्रिकोणमिती, लघुकोन व विशालकोन असलेल्या त्रिकोणांचे क्षेत्रफळ काढण्याची सूत्रे, निर्देशक भूमिती, कोनाची व्याख्या, ऋण कोनांची गुणोत्तरे)

शैक्षणिक संदर्भ द्वैमासिकात प्रसिद्ध झालेल्या लेखमाला, एकाच विषयावरील लेख, एका लेखकांचे लेख, अशा स्वरूपाची संकलने आता आम्ही इ-पुस्तक स्वरूपात उपलब्ध करून देत आहोत. वेबसाइटवर सध्या पुढील तीन इ-पुस्तके उपलब्ध आहेत. जरूर पहा, इतरांपर्यंतही पोहचवा. आपला अभिप्राय व सूचना आम्हाला इमेलने कळवा.

जल-थल-मल पुस्तकातील निवडक प्रकरणे <https://www.sandarbhociety.org/pdf/Jal-Thal-Mal%20.pdf>

डॉ आनंद कर्वे यांच्या लेखांचे संकलन <https://www.sandarbhociety.org/pdf/vaidnyanik-mushafiri.pdf>

द्विजगण अवघे लेखमाला <https://www.sandarbhociety.org/pdf/Dvijaga%E1%B9%87a-e-book.pdf>



इ- शैक्षणिक संदर्भ

सर्वांसाठी मोफत उपलब्ध



- २०१८ पासून आम्ही शैक्षणिक संदर्भची छापील आवृत्ती न काढता इ-अंक प्रकाशित करण्याची सुरुवात केली आणि आपला त्यास भरघोस प्रतिसाद मिळतो आहे त्याबद्दल धन्यवाद.
- आपल्याला इ-अंक हवा असल्यास संदर्भ सोसायटीच्या वेबसाईटवरून (www.sandarbhsociety.org) डाऊनलोड करू शकता, किंवा sandarbh.marathi@gmail.com या इ-मेलवर आपला इ-मेल पत्ता व व्हॉट्सप क्रमांक आम्हाला कळवावा.
- इ-अंक करताना छपाई खर्च जरी वाचला तरी डीटीपी, कार्यालयीन खर्च, लेखा परीक्षण असे अनेक खर्च आहेतच. देणगी रूपाने आपण या खर्चाचा भार उचलू शकता. त्यासाठी आपणास विनंती आहे की, आपला सहभाग वार्षिक देणगी रूपात संदर्भ सोसायटीकडे पाठवावा. देणगीवर आयकर सवलत मिळू शकते.
- देणगीसाठी तपशील
 - ❖ रोख रक्कम कार्यालयात जमा करू शकता.
 - ❖ चेक किंवा डी डी : 'संदर्भ सोसायटी' या नावाने पुणे येथे वटणारा असावा.
 - ❖ इ-पेमेंट : Sandarbh Society
Account No.: 20047006634
Bank of Maharashtra, Mayur Colony, Pune
IFS Code: MAHB0000852

शैक्षणिक संदर्भ, द्वारा समुचित एन्व्हायरो टेक,
६, एकता पार्क, निर्मिती शोरूमच्या मागे, लॉ कॉलेज रस्ता, पुणे- ४.
फोन: ०२०-२५४६०१३८ (स. १० ते संध्या. ५, सोम. ते शनि.)