

शैक्षणिक संदर्भ अंक १३३

डिसेंबर २०२१ – जानेवारी २०२२

# हे सर्वात महत्वाचे समीकरण का आहे?

लेखक : एथन सिगल

संक्षिप्त अनुवाद : नीलिमा सहस्रबुद्धे

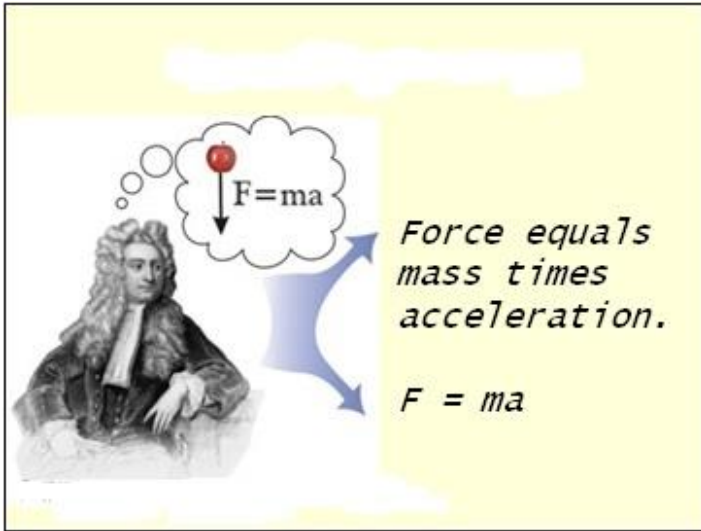
# हे सर्वात महत्त्वाचे समीकरण का आहे?

लेखक : एथन सिगल

संक्षिप्त अनुवाद : नीलिमा सहस्रबुद्धे

भौतिकशास्त्र शिकणारे सर्वजण जे एक महत्त्वाचे समीकरण शिकतात, ते आहे न्यूटनचे  $F = m \times a$  हे समीकरण.

१७ व्या शतकात हे समीकरण मांडल्यापासून साडेतीनशे वर्षे ते भरपूर वापरले गेले आहे. त्याला महत्त्वाच्या यादीत वरचा नंबर मिळाला नसला तरी, भौतिकीचे विद्यार्थी या



समीकरणातून सुरुवातीपासून खूप काही शिकत राहतात. पुढे अभियांत्रिकी, कॅल्क्युलस आणि अनेक गुंतागुंतीच्या संकल्पना शिकतानाही हे सोबत असते.

याचा अभ्यास करणाऱ्यांना

शतकानुशतके नवी दृष्टी मिळत गेली आहे. ते सतत सगळीकडे दिसल्याने त्याला पुरेसा 'भाव' मिळत नसावा! आता भौतिकी शिकायची तर न्यूटनपासूनच सुरुवात करायला हवी,

आणि हे समीकरण म्हणजे न्यूटनचा दुसरा नियम शिकण्याची किल्ली. त्यात फक्त तीन गोष्टी : बल, वस्तुमान आणि प्रवेग. मात्र या तिन्हीच्या खोलात शिरून विचार करायला लागलो की भौतिकीची नवनवीन दालने उघडायला लागतात...

साधे रेषेचे समीकरण घ्या.  $y = mx + b$ . पण न्यूटनचे समीकरण याहीपेक्षा सोपे, त्यात  $b$  लागतच नाही. का बरे?

कारण हे गणित नाही... भौतिकी आहे. इथे प्रत्यक्ष सृष्टीतल्या पदार्थांचे वागणे मांडायचे असते.  $b$  असेल, तर ते काहीतरी विचित्र होऊन जाईल.

न्यूटनने पदार्थांच्या गती संदर्भात तीन नियम मांडले,



चित्र स्रोत :

[https://www.teachengineering.org/lessons/view/cub\\_mechanics\\_lesson04](https://www.teachengineering.org/lessons/view/cub_mechanics_lesson04)

१. बाहेरून बल लावलेले नसेल तर स्थिर वस्तू स्थिर राहिल आणि गतिमान वस्तू त्याच गतीने जात राहिल.

२. वस्तूवर लावलेल्या एकूण बलाच्या दिशेने आणि बल भागिले वस्तुमान एवढा प्रवेग वस्तूमध्ये निर्माण होईल.

३. जेव्हा एक वस्तू दुसऱ्या वस्तूवर बल लावते, त्याच वेळी दुसरी वस्तू पहिल्या वस्तूवर तेवढेच बल उलट दिशेने लावते.

वेगळ्या शब्दात : जेवढी क्रिया तेवढीच प्रतिक्रिया उलट दिशेने होत असते.

बाह्य बल लावले नसेल तेव्हा स्थिर वस्तू स्थिर राहते आणि गतिमान वस्तू गतिमान राहते या पहिल्या नियमाचा अर्थच  $F = m \times a$  ;  $ma + b$  नव्हे.

आता या  $F$  म्हणजे बल,  $m$  म्हणजे वस्तुमान आणि  $a$  म्हणजे प्रवेग यांचे नाते पाहू.

- एखाद्या गतिमान वस्तूचे वस्तुमान तुम्हाला माहित असेल किंवा मोजता येत असेल, तिचा प्रवेगसुद्धा माहित असेल तर  $F = m \times a$  वापरून तुम्हाला तिच्यावर कार्य करणारे बल काढता येईल.
- वस्तूचे वस्तुमान आणि तीव्र कार्य करणारे बल माहित असेल, तर तिचा प्रवेग काढता येईल. (गुरुत्वाकर्षणामुळे निर्माण होणारा प्रवेग काढण्यासाठी असे गणित केले जाते.)
- आणि जर एखाद्या वस्तूवर कार्य करणारे एकूण बल आणि त्या वस्तूचा प्रवेग तुम्हाला माहित असेल, तर त्या दोन्हीचा उपयोग करून तुम्ही त्या वस्तूचे वस्तुमान ठरवू शकता.

अशाच कोणत्याही समीकरणात (एका बाजूला एक चल (variable), दुसऱ्या बाजूला दोन चलांचा गुणाकार) वरीलप्रमाणे दोन चले माहित असतील, तेव्हा तिसरे चल काढता येते.

उदाहरणार्थ, प्रसरण पावणाऱ्या विश्वाचा हबलचा नियम :  $v = H \times r$  (एकमेकांपासून दूर जाण्याची गती = हबल स्थिरांक  $\times$  एकमेकांमधले अंतर). दुसरे उदाहरण , ओहमचा नियम :  $V = I \times R$  (विद्युतदाब = विद्युतधारा  $\times$  विद्युतरोध).

$F = m \times a$  याचाच विचार वेगळ्या पद्धतीने करता येईल:

$F/a = m$  किंवा  $F/m = a$ . दिलेल्या माहितीवरून माहित नसलेल्या गोष्टी काढण्याचा सराव भौतिकी शिकण्याच्या सुरुवातीला विद्यार्थ्यांना उपयोगी पडतो.

## पुढची पातळी

$F = m \times a$  वरून पुढच्या पायरीवर जाणे तसे साधे सरळ पण विलक्षण आहे; ते म्हणजे प्रवेग म्हणजे काय याची जाणीव. प्रवेग म्हणजे, वेगामध्ये एका ठरावीक वेळात होणारा बदल. हा सरासरी बदल असू शकतो, जसे की, काही मिनिटात गाडी ० पासून ५० कि.मी. प्रतितास पर्यंत नेणे. किंवा हा एखाद्या विशिष्ट क्षणी, तत्क्षणी होत असणारा वेगातला बदल असू शकतो.

साधारण हे  $a = \Delta v / \Delta t$  असे लिहितात. (प्रवेग = वेगातील बदल / वेळातील बदल). इथे  $\Delta$  (डेल्टा)चा अर्थ शेवटची किंमत वजा सुरुवातीची किंमत असा असतो. याउलट  $a = dv/dt$ , इथे  $d$  अक्षर तत्क्षणी होणारा बदल या अर्थाने वापरले जाते.

आता वेग म्हणजे वस्तूच्या स्थानात (position  $x$ ) होणारा बदल असल्याने सरासरी वेगासंदर्भात  $v = \Delta x / \Delta t$  असे आणि तत्क्षणीच्या वेगासंदर्भात  $v = dx/dt$  असे मांडता येते. एखाद्या वस्तूचे स्थान, तिचा वेग, तिचा प्रवेग, बल, वस्तुमान आणि वेळ या सगळ्यांमधले नाते विलक्षण आहे.

या कोड्याबद्दल वैज्ञानिक पिढ्यानपिढ्या विचार करत होते. शेवटी सतराव्या शतकात गतीबद्दलची प्राथमिक समीकरणे मांडली गेली. या समीकरणांमध्ये काही अक्षरे ठळक केलेली आहेत. त्याला विशेष अर्थ आहे. ठळक केलेल्या  $x$ ,  $v$ ,  $a$  आणि  $F$  या सर्वांना नुसती किंमत नाही, तर विशिष्ट दिशादेखील आहे. आपण एका त्रिमित विश्वात राहात असल्याने समीकरणामधली प्रत्येक ठळक केलेली गोष्ट प्रत्यक्षात तीन समीकरणांबद्दल सांगत असते...  $x$ ,  $y$  आणि  $z$  अशा तीन मितींमधल्या समीकरणांबद्दल.

ही तिन्ही मितींमधली समीकरणे त्या त्या मितीमध्ये स्वतंत्र असतात. म्हणजे असे : बल, स्थान, वेग, प्रवेग यासंदर्भात  $x$  दिशेमध्ये जे घडते, त्याचा परिणाम इतर गोष्टींवरच्या  $x$  दिशेवरच होतो. तसेच  $y$  आणि  $z$  दिशेमध्ये जे घडते, त्याचा परिणाम त्याच दिशेपुरता असतो. म्हणूनच : तुम्ही जर सरळ वरच्या दिशेने चेंडू टाकला, तर त्यावर फक्त गुरुत्वाकर्षणाचा परिणाम होतो, तोही फक्त वर किंवा खाली याच दिशेने... तो बाजूच्या दिशेने हालणार नाही, कारण त्या दिशेने त्यावर कोणतेही बल काम करत नाही.

या समीकरणाचा उपयोग आणखीही काही प्रभावी पद्धतींनी करता येतो. वस्तूंना बिंदुवत वस्तुमान मानण्याऐवजी, त्यांना वेगवेगळ्या आकारातले वस्तुमान धरून त्यांचा विचार करता येतो. सरळ रेषेत जाणाऱ्या वस्तूऐवजी तारे किंवा ग्रहांच्या किंवा स्वतःच्याभोवती फिरणाऱ्या वस्तूंना या समीकरणात बसवता येते. यातून पुढे मग घूर्णन (torque), जडत्व (moment of inertia), कोनीय स्थान (angular position), कोनीय वेग (angular velocity), कोनीय प्रवेग (angular acceleration) या सगळ्या संकल्पनांचा विचार सुरू होतो. न्यूटनचे नियम आणि समीकरणे इथेही लागू पडतात. कारण  $F = m \times a$  पासूनच यांचीही चर्चा सुरू होते.

## बदलाचा दर आणि कॅल्क्युलस (कलनशास्त्र)

आता बदलाचा दर ही संकल्पना समजावून घ्यायला हवी.

वेग म्हणजे वस्तूचे स्थान बदलण्याचा दर : अंतर/वेळ किंवा अंतरातील बदल/वेळातील बदल. त्याचे परिमाण आहे मीटर/सेकंद किंवा किमी/तास.

प्रवेग म्हणजे वेगातील बदलाचा दर : वेगातील बदल/वेळातील बदल. याचे परिमाण झाले मीटर/सेकंद<sup>२</sup>. कारण मीटर/सेकंद/सेकंद.

तुम्हाला जर एखाद्या वस्तूचे आत्ताचे स्थान आणि आत्ताची वेळ माहीत असेल, तिचा आत्ताचा वेग माहीत असेल आणि तिच्यावर आत्ता जे बल कार्यरत आहे व पुढेही कार्यरत राहिल ते माहीत असेल; तर तुम्हाला ती वस्तू भविष्यात कुठे कशी कधी जाईल हे सांगता येते. मग ते भविष्य कितीही दूरचे का असेना... अर्थात फार लांबच्या भविष्यासाठी गणित करायला लागणारी संगणकीय सोय जवळ असायला हवी. न्यूटनची समीकरणे ठोस उत्तरे देतात आणि म्हणून एखाद्या वस्तूची विशिष्ट वेळची मूळ स्थिती मोजता येत असेल, तीवर पुढच्या काळात काम करणारे बल माहीत असेल, तर तिचा पुढचा मार्ग निश्चित करता येतो.

### Second order differential equation

डिफरन्शियल इक्वेशन ही गणितातील एक महत्त्वाची शाखा आहे.

- हे समीकरण तुम्हाला एखाद्या विशिष्ट वस्तूची पुढच्या क्षणाची अवस्था काय असेल, ते सांगते ... अर्थात आत्ताच्या क्षणाची अवस्था तुम्हाला माहीत असेल तर! हा क्षण संपला, की पुन्हा पुढच्या क्षणाची... असे करत भविष्यात कितीही पुढे जाता येते.
- मात्र : बरीचशी डिफरन्शियल इक्वेशन अचूक सोडवता येत नाहीत. त्याचे जवळपासचे किंवा अंदाजे / अनुमानित उत्तर काढावे लागते. शिवाय यातल्या पुष्कळ डिफरन्शियल इक्वेशनचे उत्तर सहज काढता येत नाही. फार अवघड असतात ती.

$F = m \times a$  हे असेच एक अवघड डिफरन्शियल इक्वेशन आहे. तरीही तुलनेने साध्यासोप्या परिस्थिती संदर्भात आपण जी उत्तरे मिळवू शकलो, त्यातून खूप काही शिकायला मिळालेले आहे. कित्येक वर्षे भौतिकीमध्ये जे काम झालेले आहे, त्याचा पाया हाच आहे.

ग्रहगोलांची गती, धूमकेतू आणि अशनी पृथ्वीजवळ कधी दिसतील त्याचे अंदाज असेच घेतले जातात. चंद्रावर जाण्यासाठी जी गणिते करावी लागतात, त्याच्या मुळाशी  $F = m \times a$  हेच समीकरण असते. अशा समीकरणांना सेकंड ऑर्डर डिफरन्शियल

इक्वेशन (second order differential equation) म्हणतात, कारण इथे दोन वेळा बदलाचा दर घेतलेला आहे... एक : प्रवेग म्हणजे वेगातल्या बदलाचा दर आणि दोन : वेग म्हणजेच अंतर किंवा स्थानाच्या बदलाचा दर.

## पुढचा टप्पा : रॉकेट-विज्ञान आणि सापेक्षता

आता मात्र तुम्हाला थोडे खरे जाणून घ्यायला हवे. (म्हणजे? आतापर्यंतच्या थापा होत्या???)

न्यूटनने स्वतः कधीही  $F = m \times a$  अशी मांडणी केली नव्हती. त्याने मांडले होते : बल म्हणजे संवेगात होणारा बदल... संवेग म्हणजे वस्तुमान  $\times$  वेग.

“Force is the time rate of change of momentum.”  $F$  म्हणजे  $(m \times v)$  मध्ये होणारा बदल.

या दोन विधानातला फरक तुमच्या लक्षात येतो आहे ना?

$F = \Delta(mv)/\Delta t$  किंवा  $F = d(mv)/dt$  असे न्यूटनचे मुळातील म्हणणे होते.  $F = m \times a$  पेक्षा हे वेगळे आहे. आपण जेव्हा  $F = m \times a$  असे म्हणतो, तेव्हा आपण  $m$  म्हणजे वस्तुमान बदलत नाही, ते स्थिर आहे असे गृहीत धरतो!

वस्तुमान स्थिर असणे हे काही सार्वकालिक सत्य नाही! विसाव्या शतकात याला असणारे अपवाद स्पष्ट झाले. त्यातूनच भौतिकीची प्रगती झालेली आपण पाहिली.

एक तर रॉकेट-विज्ञान. रॉकेट प्रवेगासह उड्डाण करताना सातत्याने इंधन जाळून ते बाहेर सोडत वस्तुमान कमी करत जाते. जेव्हा  $m$  वस्तुमान आणि  $v$  वेग या दोन्हीमध्ये होणारा बदल दाखवला जातो, त्याला बरेचजण रॉकेट समीकरण म्हणतात. जेव्हा वस्तुमान



बदलत असते, तेव्हा त्याचा परिणाम गतीवर आणि गतीबदलावर देखील होतो. त्यामुळे रॉकेटचा मार्ग ठरवायला थोडे अधिक गुंतागुंतीचे गणित करायला लागते.



दुसरे म्हणजे विशिष्ट सापेक्षता : जेव्हा वस्तूचा वेग हा प्रकाशाच्या वेगाच्या जवळपास जातो तेव्हा विशिष्ट सापेक्षतेचा विचार करावाच लागतो. विशिष्ट सापेक्षतेनुसार कोणतीही भौतिक वस्तू

प्रकाशाच्या वेगापेक्षा जास्त वेगाने जाऊ शकत नाही.

न्यूटनचे नियम आणि  $F = m \times a$  समीकरण वापरत असताना जेव्हा बल लावल्यावर वस्तूचे स्थान आणि प्रवेग गणिताने मांडले जात असतात, तेव्हा कधीतरी वेग चुकून प्रकाशापेक्षा जास्त येऊ शकतो... मात्र ही चूक  $F=d(mv)/dt$  वापरताना होत नाही. अर्थात प्रकाशाच्या वेगाजवळच्या वेगांसाठी गणित करताना सापेक्ष संवेग (relativistic momentum) वापरायचे ध्यानात ठेवावे लागते. सापेक्ष संवेग वापरला की विशिष्ट सापेक्षतेचा नियम आपोआप पाळला जातो.

बऱ्याच जणांनी असे म्हटले आहे, की न्यूटनला  $F = m \times a$  असे सहजच म्हणता आले असते पण त्याने  $F=d(mv)/dt$  असे म्हटले याचे कारण कदाचित त्याला विशिष्ट सापेक्षतेची कल्पना असावी. हे अमान्य करता येण्याजोगे नाही. आणि हेदेखील खरेच आहे की या सोप्या दिसणाऱ्या समीकरणाच्या मागे आपल्या या विश्वाचे रहस्य उलगडणारी गूढरम्य दृष्टी उभी असावी. नवनवीन गणिते सोडवण्याची आधुनिक तंत्रे लागू केली की याची प्रचीती येते.

जेव्हा जेव्हा एखादा कण काळ-अवकाशाच्या वक्रपटावर धावू लागतो, एखाद्या वस्तूवर बल काम करते, एखादी वस्तू दुसरीवर आपटते; स्थिरतेपेक्षा किंवा ठरावीक गतीने जाण्यापेक्षा वेगळे काहीही घडते, त्या त्या वेळी बल आणि प्रवेगाची संकल्पना पुढे येते.

$F = m \times a$  हे सदासर्वकाळ जरी लागू होत नसले, तरी बऱ्याच व्यापक परिस्थितींमध्ये लागू होते, त्यातून मिळणारी सखोल दृष्टी, त्यातून कळणारे विविध प्रणालींचे (साध्या तसेच गुंतागुंतीच्या) आंतरसंबंध यामुळे हे भौतिकीमधले अत्यंत महत्त्वाचे समीकरण आहे हे लक्षात येते.

तुम्ही जर भौतिकीमधले एकच समीकरण कुणाला शिकवणार असाल, तर ते हेच असूदे. पुढे पुढे प्रयत्न करून त्यातून, साऱ्या विश्वाचे कार्य कसे चालते याचे कोडेसुद्धा उलगडता येते!

मूळ लेख: <https://medium.com/starts-with-a-bang/why-f-ma-is-the-most-important-equation-in-physics-ebd9afb21e9d>

§§§

लेखक : एथन सिगल, खगोलभौतिकशास्त्रज्ञ, विश्वउत्पत्तीशास्त्र या विषयाचे लेखक आणि विज्ञान संप्रेषक. नासासाठी लेखन करतात.

संक्षिप्त अनुवाद : नीलिमा सहस्रबुध्दे, शैक्षणिक संदर्भ संपादक गटात सहभागी.

इ-मेल : [neelimasahasrabudhe@gmail.com](mailto:neelimasahasrabudhe@gmail.com)

(कळीचे शब्द: न्यूटन, न्यूटनची समीकरणे, बल, वस्तुमान, प्रवेग, रॉकेट-विज्ञान,

सापेक्षता, बदलाचा दर, कॅल्क्युलस)

## शैक्षणिक संदर्भ द्वैमासिकाविषयी

शैक्षणिक संदर्भ हे पालकनीती परिवाराचे द्वैमासिक ऑगस्ट १९९९ पासून संदर्भ सोसायटी प्रकाशित करत आहे. मराठीतून चांगले विज्ञान वाचायला मिळावे, शालेय व महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांच्या कुतूहलाला प्रोत्साहन मिळावे, अनुभवांना जोडून असलेल्या विज्ञानाची सहज ओळख व्हावी आणि समाजात वैज्ञानिक दृष्टिकोन वाढावा, हे याचे उद्देश आहेत.

२०१८ सालापासून आम्ही शैक्षणिक संदर्भची छापील आवृत्ती न काढता इ-अंक प्रकाशित करत आहोत व इमेल आणि व्हॉट्सॅपच्या माध्यमातून वाचकांपर्यंत पोहोचवत आहोत.

आपल्याला आमचे अंक वाचायचे असल्यास आपला इ-मेल पत्ता आणि व्हॉट्सॅप क्रमांक (ऐच्छिक) आम्हाला [sandarbh.marathi@gmail.com](mailto:sandarbh.marathi@gmail.com) वर पाठवावा. दर आठवड्याला एक लेख व दर दोन महिने पूर्ण झाल्यावर आठ लेखांचा एकत्रित एक अंक असे आपल्याला पीडीएफ स्वरूपात मिळतील.

[www.sandarbhsociety.org](http://www.sandarbhsociety.org) या वेबसाईटला जरूर भेट द्या. जुने अंकही त्यावर पीडीएफ स्वरूपात उपलब्ध आहेत.

हा उपक्रम विनामूल्य आहे, पण आपण आपला सहभाग ऐच्छिक देणगी रूपात संदर्भ सोसायटीकडे पाठवू शकता. अधिक माहिती वेबसाईटवर उपलब्ध आहे.

- संपादक मंडळ, शैक्षणिक संदर्भ व विश्वस्त मंडळ, संदर्भ सोसायटी