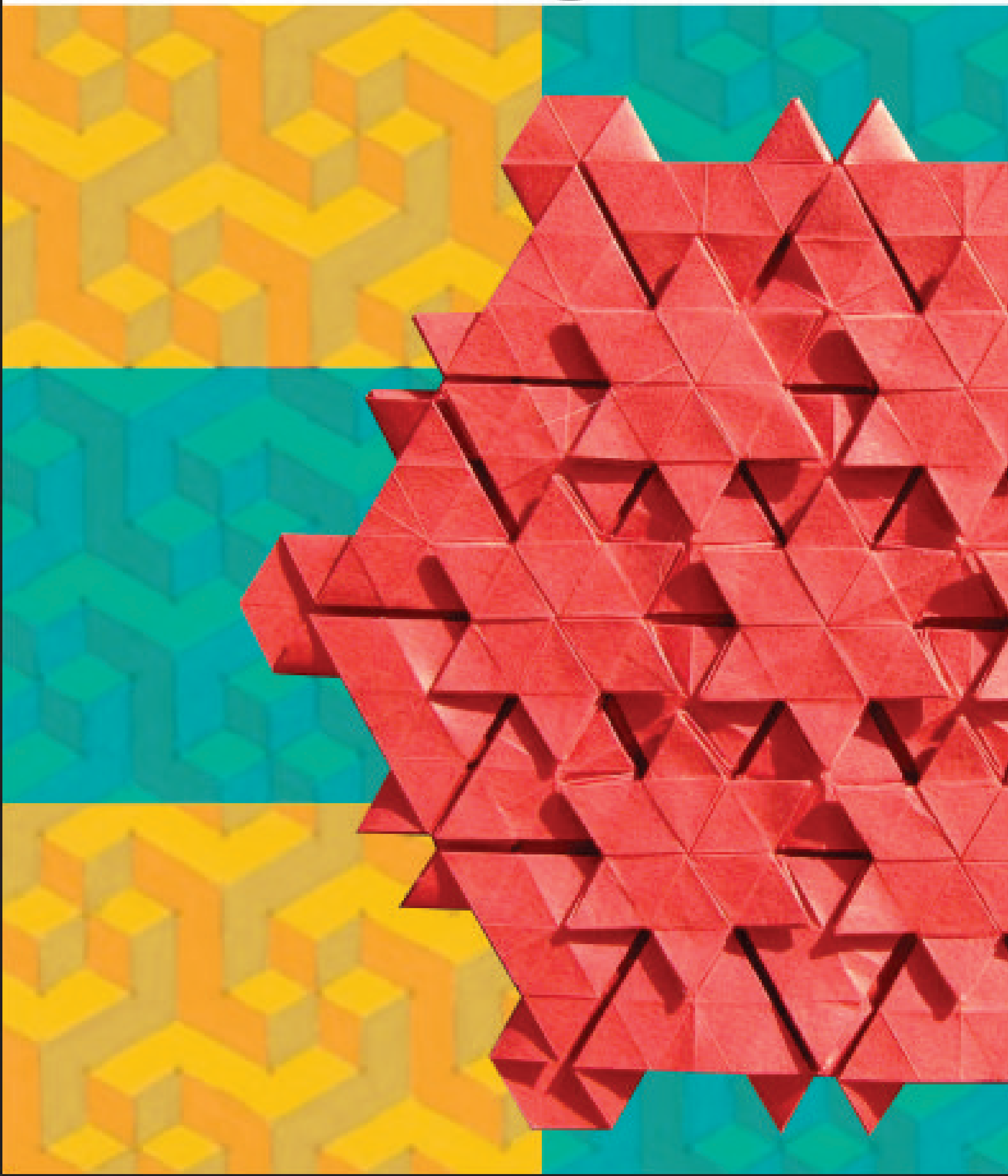
जून-जुलै २०१६

अंक १००

शैक्षणिक संदर्भ

शिक्षण आणि विज्ञान
यात रुची असणाऱ्यांसाठी



शैक्षणिक

संदर्भ

अंक १००
जून-जुलै २०१६
पालकनीती परिवारासाठी
निर्मिती आणि वितरण : संदर्भ

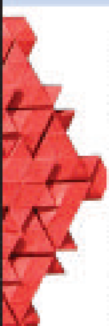
संदर्भ, द्वारा समुचित एन्व्हायरोटेक प्रा. लि.,
फ्लॅट नं. ६, एकता पार्क सोसायटी,
निर्मिती शोरूमच्या मागे, अभिनव शाळेशेजारी,
लॉ कॉलेज रस्ता, पुणे - ४११ ००४.
फोन नं. २५४६०१३८
E-mail : sandarbh.marathi@gmail.com
web-site : sandarbhsociety.org

चेक 'संदर्भ सोसायटी'या नावे काढावेत.

या गणित विशेषांकाचे संपादक श्री नागेश मोने आहेत.

पोस्टेजसहित वार्षिक वर्गणी : ₹ ३००/- अंकाची किंमत : ₹ ५०/-

एकलव्य, होशंगाबाद यांच्या सहयोगाने हा अंक प्रकाशित केला जात आहे.



मुखपृष्ठ

ओरिगामी ही कागदाच्या घड्या घालून वस्तू बनवण्याची प्राचीन कला. ओरिगामी मधून गणित शिकणे हा एक चित्तथरारक प्रकार आहे.यामध्ये मुलांच्या डोळ्यासमोर आकार तयार होतातआणि त्यांना गणितातील अवघड संकल्पना मजेशीर रितीने समजायला मदत होते. स्पेनमधील मूर लोकांच्या कलाकृतींमध्ये(धातूकला,दागिने बनवणे, दगडी कलाकृती,वास्तकला) रेषा, कोन आणि भूमितीतील अनेक आकृत्या असतात. त्यांच्या सर्व हस्तकलांमध्ये गणितातील tessellations म्हणजेच रचनांच्या वारंवारितेनुसार एकच नक्षी पुन्हा पुन्हा वापरली जाते. ओरिगामीतही हा मूरीश आकृतीबंध वापरला जातो. कागदाच्या घड्या घालून गणित शिकण्याबद्दल लेख वाचा पान२० वर.

कव्हर ४

मागील कव्हर वर दिसणारे विविध प्राणी पक्षी कागदाचे केवळ सात तुकडे विशिष्ट प्रकारे जोडून केले आहेत.हे एक हजारो वर्षांपूर्वीचे चीनी कोडे आहे- टॅनग्रॅम. खेळ म्हणून मुले यातून त्रिकोण, चौकोन आणि समांतर भूज चौकोन हे तीन आकार शिकू शकतात. यातून हजारो रचना तुम्ही करू शकता. कशा ते वाचा पान ८० वर .

* सर्व चित्रे इंटरनेटवरून साभार

अनुक्रमणिका

शैक्षणिक संदर्भ अंक – १००

ज्या वाचकांना फक्त email वर शैक्षणिक संदर्भ अंकाची soft copy पाठवलेली चालेल, त्यांनी संदर्भला इमेल करून तसे कृपया कळवावे.

सरासरीची संकल्पना

लेखक : विवेक मेहता • **अनुवाद :** संजीवनी आफळे

निरनिराळ्या परिचित-अपरिचित आकड्यांबरोबर आपला सतत संबंध येत असतो. एखाद्या क्रिकेट सामन्याचा धावफलक असू दे, देशातील गरिबी आणि बेरोजगारीची स्थिती सांगणाऱ्या वर्तमानपत्र किंवा दूरदर्शनवरील बातम्या असू देत, एखाद्या वर्गातील मुलांची त्यांच्या शिक्षिकेने ठेवलेली नोंद असू दे, की एखाद्या कुटुंबाचा महिन्याचा जमा-खर्च... सगळीकडे आकडेच आकडे आहेत.

ही आकडेवारी अर्थातच महत्त्वाची आहे : खेळाची आकडेवारी बघून एखादा खेळाडू कसा खेळतोय ते समजते; त्यावर त्याची पुढच्या सामन्यामधली किंवा मालिकेमधली संधी अवलंबून असते. गरिबी आणि बेरोजगारीचे आकडे देशांच्या सरकारांना त्यांची धोरणे ठरवायला उपयोगी पडतात. ठेवलेल्या नोंदींच्या आधारे शिक्षिका तिची शिकवण्याची पद्धत आणि वर्गातल्या मुलांची प्रगती यामधला परस्परसंबंध जाणून घेऊ शकते आणि एखाद्या कुटुंबाच्या जमा-खर्चाचे आकडे त्या कुटुंबाचे बजेट बनवायला उपयोगी पडतात.

एकदा एका कार्यशाळेदरम्यान गप्पा मारताना एकजण सांगू लागले, की त्यांच्या ओळखीचा फॉरेस्ट गार्ड आपल्या जंगलात होणारी वाघांची गणती दर वेळेला पाच म्हणूनच नोंदवतो. आता याच्यामागचे खरे कारण काहीही असू देत; त्या गार्डने माझ्या मित्राला जे कारण सांगितले ते असे, ‘‘जोपर्यंत कागदावरती पाच वाघ दिसतायत तोपर्यंत माझ्या नोकरीला काही धोका नाही.’’

तुम्ही आता असा विचार करत असाल की वाघांची ही आकडेवारी बघून एखाद्या वन अधिकाऱ्याच्या डोक्यात असा विचार येत नसेल का, की वर्षानुवर्षे वाघांची संख्या एकच कशी? आकडेवारीमध्येच काही

गडबड आहे की त्या जंगलाची परिसंस्थाच काही खास प्रकारची आहे? माझ्या मनातही असे प्रश्न उद्भवले आणि त्याबरोबर असाही प्रश्न मनात आला की त्या फॉरेस्ट गार्डने वाघांच्या संख्येचा आकडा जर सरासरी पाच असा सांगितला असता तर त्यावेळेला आपण कोणत्या प्रश्नांवर विचार केला असता. खरंच वाघांची सरासरी संख्या सांगणे पुरेसे आहे का? आपण या प्रश्नाचा आता थोडा ऊहापोह करूयात. उदाहरणार्थ खाली तक्ता १ मध्ये मागील पाच वर्षांतील वाघांच्या मोजणीचे तीन वेगवेगळे आकडे दाखवलेले आहेत.

तुम्ही बघाल की या तीनही आकडेवाऱ्यांमध्ये वाघांची सरासरी संख्या पाचच आहे, पण वाघांच्या संख्येमध्ये जो बदल दिसतो आहे त्यामध्ये जमीन अस्मानाचा फरक आहे. पहिल्या उदाहरणामध्ये वाघांची संख्या सलगपणे वाढते आहे तर दुसऱ्या उदाहरणामध्ये ती कमी होते आहे. आणि तिसऱ्या उदाहरणात ती आधी वाढली आणि मग कमी झाली. खरंच तुम्ही वाघांच्या संख्येबद्दल काळजीत असाल तर या तीनही उदाहरणांमध्ये तुमची प्रतिक्रिया वेगवेगळी असेल. पण जर तुम्ही फक्त वाघांची सरासरी आकडेवारी बघाल तर तुम्हाला या तीन उदाहरणांमधला फरकच लक्षात येणार नाही.

आणखी एक उदाहरण पाहू. समजा एक रेल्वेगाडी कोण्या एका स्टेशनवरून रोज सकाळी साडेआठ वाजता निघते. पॅण्ट्रिकारमध्ये आग लागल्यामुळे सोमवारी गाडी ३५ मिनिटे उशिरा निघाली. शिवाय मंगळवारी ५ मि. उशिरा, बुधवारी ३ मि. उशीरा, गुरुवारी ३ आणि शुक्रवारी ४ मि. उशीरा सुटली. जर तुम्हाला शनिवारी या गाडीने प्रवास करायचा आहे आणि तुमच्याकडे मागील पाच दिवसांची आकडेवारी आहे, तर तुम्ही किती वाजता स्टेशनवर पोहोचाल? या पाच दिवसांच्या आकडेवारीची सरासरी भरेल १० मिनिटे. निश्चितच तुम्ही या सरासरी वेळेच्या हिशेबाने

तक्ता १

घटनाक्रम	**वाघांच्या संख्येचे मागील पाच वर्षांचे आकडे**	**वाघांची सरासरी संख्या**	**वाघांची संख्या**
पहिला	२, ३, ५, ७, ८	५	सतत वाढते आहे
दुसरा	८, ७, ५, ५, २	५	सतत कमी होते आहे
तिसरा	४, ७, ५, ५, ४	५	आधी वाढली मग कमी झाली

> आकडेवारी समजून घेताना एक लक्षात ठेवले पाहिजे की आकडेवारी म्हणजे नुसत्या संख्या नाहीत तर ते काही गोष्टींशी संदर्भासहित जोडलेले आहेत. त्यांना त्यांच्या संदर्भापासून वेगळे करून बघता कामा नये.

स्टेशनवर जाणार नाही, कारण तुम्हाला माहिती आहे की सोमवारी या गाडीत अशी एक विशिष्ट असाधारण घटना घडली, त्यामुळे ही सरासरी इतकी जास्त आहे. आणि तुम्ही या १० मिनिटे सरासरीच्या हिशेबाने स्टेशनवर पोहोचाल तर गाडी तुमच्याशिवायच निघून जायची शक्यता खूप जास्त आहे.

प्रत्यक्षात जेव्हा आपण दिलेल्या आकडेवारीच्या सरासरीबद्दल बोलत असतो तेव्हा आपण आकड्यांनी दर्शवलेल्या एखाद्या गोष्टीच्या मापनाकडे पाहत असतो, त्या आकड्यांची प्रवृत्ती चांगल्या तऱ्हेने समजून घेऊ पाहत असतो. आपण वाघांच्या व रेल्वेगाडीच्या उदाहरणावरून बघितलं की रोजच्या भाषेत आपण ज्या सरासरीबद्दल बोलत असतो, ती सरासरी आकड्यांबद्दल अर्थपूर्ण माहिती मिळण्याकरता पुरेशी नाही. याच कारणामुळे सांख्यिकी गणितामध्ये सरासरीच्या संकल्पनेची अनेक रूपे आहेत.

आकडेवारीच्या प्रवृत्तीचे मापक: मध्य (mean)**, मध्यक / मध्यमूल्य** (median) **आणि बहुलक** (mode)

सांख्यिकी गणितामध्ये सर्वसाधारण सरासरीलाच मध्य म्हटले जाते. सर्व आकड्यांच्या बेरजेला एकूण आकड्यांच्या संख्येने भागल्यावर जी संख्या येते तिला 'मध्य' असे म्हणतात.

रेल्वेगाडीच्या उदाहरणामध्ये एकूण संख्या होत्या ५, आणि त्यांची बेरीज होती ५० मिनिटे. त्यामुळे या आकड्यांचा मध्य १० मिनिटे येईल. यावरून अगदी स्पष्ट आहे की मिळणारी सरासरी दिलेल्या आकड्यांपैकीच एक असेल असे अजिबात नाही. जसे रेल्वेगाडीच्या बाबतीत, सोमवारपासून शुक्रवारपर्यंत गाडी कोणत्याही दिवशी १० मिनिटे उशिरा निघाली नव्हती.

> मध्य काढताना जर आपल्याकडे a_1, a_2, a_3, ---- पासून a_n पर्यंत n संख्या असतील, तर त्या संख्यांचा मध्य असेल:
>
> $$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}$$

मध्यक/ मध्यमूल्य म्हणजे दिलेल्या आकडेवारीपैकी बरोबर मधले निरीक्षण असते. ते दिलेल्या आकडेवारीची दोन समान

भागांमध्ये वाटणी करते. या दोन्ही भागांमधली निरीक्षणांची संख्या एकच असते. या दोन भागांपैकी एका भागातील निरीक्षणे मध्यकाएवढी किंवा त्याच्यापेक्षा लहान; आणि दुसऱ्या भागातील मध्यकाएवढी किंवा त्याच्यापेक्षा मोठी असतात. 'मध्यक' काढण्यासाठी आपल्याला दिलेले आकडे चढत्या किंवा उतरत्या क्रमाने लिहून काढावे लागतात. असे केल्यानंतर बरोबर मधले निरीक्षण 'मध्यक' ठरते. जर वेगवेगळ्या दिवशी रेल्वेगाडीच्या उशिर होण्याच्या वेळा चढत्या क्रमांकाने लिहिल्या, तर ते आकडे असे दिसतील - ३, ३, ४, ५, ३५. या आकडेवारीसाठी बरोबर मधले निरीक्षण आहे ४. त्यामुळे या आकड्यांचा मध्यक आहे ४ मिनिटे. याबाबतीत एकूण आकडेवारीची संख्या विषम असल्यामुळे आपल्याला मधले एकच निरीक्षण मिळाले.

जर एकूण आकड्यांची संख्या सम असेल, तर आपल्याला मध्ये दोन निरीक्षणे मिळतील. अशावेळी, त्या मधल्या दोन निरीक्षणांचा मध्य म्हणजेच सरासरी हीच मध्यक असते. जर आकड्यांची संख्या विषम असेल, तर मध्यक दिलेल्या आकड्यांपैकीच एक निरीक्षण असेल. आकड्यांची संख्या सम असताना मात्र मध्यक दिलेल्या आकड्यांपैकी एक असूही शकते किंवा नसूही शकते.

> तुम्ही सांगू शकता का की कोणत्या स्थितीमध्ये मध्यक दिलेल्या आकडेवारीपैकी एक निरीक्षण असेल आणि कोणत्या स्थितीमध्ये नसेल?

दिलेल्या आकडेवारीपैकी बहुलक असे निरीक्षण असते जे सगळ्यात जास्त वेळा आलेले आहे, म्हणजेच त्याची वारंवारता (frequency) सगळ्यात जास्त आहे. रेल्वे गाडीच्या उदाहरणात फक्त एकच निरीक्षण जास्त वेळा आले आहे. गाडी २ वेळा ३ मिनिटे उशिरा निघाली आहे. म्हणून या आकडेवारीचा बहुलक असेल ३ मिनिट. हे स्पष्ट आहे की बहुलक नेहमीच दिलेल्या आकडेवारीपैकी एक असेल. एकापेक्षा अधिक निरीक्षणांची वारंवारता तीच असेल किंवा एकापेक्षा जास्त वेळा आलेले कोणतेही निरीक्षण नाही, हे मात्र शक्य आहे.

सरासरी : कधी कोणती वापरावी?

सरासरीच्या या तिन्ही संकल्पना बघितल्यानंतर तुम्ही विचार करत असाल की कोणत्या परिस्थितीत कोणती सरासरी वापरावी? कारण या तीनही सरासरी निरीक्षणांबाबत काही न काही माहिती देतातच. काही उदाहरणांच्या मदतीने आपण हे समजावून घ्यायचा प्रयत्न करू.

उदाहरण १: जेव्हा संख्या गुणात्मक असतील.

एखाद्या वर्गात जर मुलांना विचारले की त्यांना कोणता रंग सर्वात जास्त आवडतो, तर मिळालेली उत्तरे अशी असू शकतील – हिरवा, निळा, काळा, गुलाबी, पिवळा, हिरवा, पांढरा, जांभळा, निळा इत्यादी. याबाबतीत आपल्याकडे जी निरीक्षणे आहेत ती संख्यात्मक नसून गुणात्मक आहेत. या परिस्थितीमध्ये तुम्ही मध्यचा उपयोग करू शकता का? उत्तर अगदी स्पष्ट आहे, 'नाही'.

मध्य काढण्यासाठी दिल्या गेलेल्या निरीक्षणांची बेरीज करावी लागते. जेव्हा निरीक्षणे गुणात्मक असतील तेव्हा असे करणे अशक्य आहे. मग, गुणात्मक आकडेवारीसाठी मध्यक काढले जाऊ शकते काय? याचेही उत्तर 'नाही' असेच असेल. का ते तुम्हाला समजेलच. परंतु गुणात्मक आकडेवारीसाठी बहुलक काढता येते कारण हे मापन वारंवारतेवर अवलंबून असते. रंगांच्या उदाहरणात, बहुलक काढण्यासाठी आपल्याला हे बघावे लागेल की कोणता रंग सगळ्यात जास्त मुलांना आवडतो.

उदाहरण २ : गटबाह्य निरीक्षणे (Outliers)

सांख्यिकी भाषेमध्ये Outliers म्हणजे – बाकी सर्व निरीक्षणांच्या तुलनेत वेगळे दिसून येणारे निरीक्षण. जसे रेल्वेगाडीच्या उदाहरणामध्ये सोमवारी झालेल्या अपघातामुळे गाडीचे ३५ मिनिटे उशिरा निघणे. आकडेवारीमध्ये असणारे असे निरीक्षण कमाल मूल्य (extreme values) दर्शवते.

अशा उदाहरणामध्ये मध्यचा उपयोग आकडेवारीबद्दल चुकीची माहिती दाखवतो परंतु मध्यक आकडेवारीला योग्य तऱ्हेने दर्शवितो, कारण गटबाह्य निरीक्षणांची उपस्थिती मध्यकाला विशेष प्रभावित करत नाही. सांख्यिकीय विश्लेषणामध्ये जर अशी कमाल मूल्ये असतील तर आणखी एक पद्धत वापरली जाते. अशी कमाल मूल्ये वेगळी करून उरलेल्या निरीक्षणांचाच वापर केला जातो. उदाहरणार्थ, रेल्वेगाडीच्या बाबतीत ३५ मिनिटे या निरीक्षणाला बाजूलाच ठेवून सरासरी काढली जाते. पण ही पद्धतसुद्धा पूर्ण विचारांतीच वापरली पाहिजे.

उदाहरण ३ : आकड्यांचे एका बाजूला झुकणे

इथे समाजात व्यापून राहिलेल्या असमानतेशी जोडलेले एक उदाहरण घेऊ. तक्ता क्र. २ मध्ये एका शिक्षण संस्थेतील कर्मचाऱ्यांची संख्या आणि त्यांचे पगार यांची तीन समूहामध्ये केलेली वाटणी दाखवलेली आहे.

संस्थेमध्ये काम करणाऱ्या कामगारांची

तक्ता २			
	शिक्षक	**कर्मचारी**	**ठेकेदारीवरील कामगार**
संख्या	३५०	५००	२,५००
मासिक वेतन	१,००,०००	४०,०००	७,०००

एकूण संख्या आहे:

३५० + ५००+ २५०० = ३३५०

या ३३५० लोकांचे एकूण वेतन होईल:

(३५० x १०००००) + (५०० x ४००००) + (२५०० x ७०००) = ७,२५,००,०००

म्हणजेच संस्थेच्या बजेटमधून एकूण ७ कोटी २५ लाख रुपये या सर्व कामगारांच्या वेतनापोटी खर्च होतात. दुर्लक्ष न करण्यासारखी बाब म्हणजे या एकूण वेतनामध्ये फक्त ३५० शिक्षकांची हिस्सेदारी आहे साडेतीन कोटी रुपये आणि २५०० कामगारांचे वेतन आहे फक्त १ कोटी ७५ लाख रुपये. सरळ सरळ ही आकडेवारी शिक्षकांच्या बाजूला झुकलेली आहे. या आकडेवारीचा मध्य असेल:

७,२५,००,०००/३३५०

= २१,६४१.७९

मध्यक असेल ७००० (करून बघा) आणि बहुलकसुद्धा ७०००च असेल. तुम्ही यापैकी कोणत्या सरासरीला बरोबर म्हणाल? तसे तर या प्रश्नाचे उत्तर जितके सांख्यिकीय आहे तितकेच राजकीयही.

याबाबतीत बहुलक किंवा मध्यक परिस्थिती चांगल्या तऱ्हेने दर्शवतात, कारण बहुलक असे वेतनमान दर्शवतो जे सगळ्यात जास्त कामगारांना मिळते, त्याचबरोबर मध्यक हे सांगते आहे की कमीत कमी अर्ध्या कामगारांना ७००० किंवा त्यापेक्षा कमी वेतन मिळते आहे. तेच मध्यची किंमत सगळ्यात कमी वेतनाच्या जवळजवळ तीनपट आहे, आणि सगळ्यात जास्त वेतन मध्याच्या किंमतीच्या पाचपट आहे. अशा वेळेला जर कोणी म्हणेल की संस्थेत काम करणाऱ्या लोकांचे सरासरी मासिक वेतन २१,६४१.७९ रुपये आहे, तर हे संस्थेत मिळणाऱ्या पगाराचे योग्य चित्र नसेल.

उदाहरण ४: जेव्हा आकडे दोन्ही बाजूला जवळजवळ समान तऱ्हेने झुकत असतील.

बऱ्याच वेळेला एखाद्या आकडेवारीची निरीक्षणे एखाद्या केंद्रीय संख्येच्या आसपास असतात किंवा आहेत असे मानले जाते. अशा वेळी मध्यचा उपयोग जास्त चांगल्या प्रकारे होतो. उदाहरण म्हणून आपण एक खानावळ घेऊ, येथे एका वसतिगृहाची ४०० मुले जेवायला येतात. महिन्याच्या शेवटी जेवणावर होणारा एकूण खर्च मुलांमध्ये

वाटण्याची सगळ्यात चांगली आणि सोपी पद्धत मध्यच असेल. काही उदाहरणे अशीही असू शकतील ज्यामध्ये मध्य, मध्यक आणि बहुलक तिन्हीपैकी कशाचाच उपयोग होणार नाही. अशा वेळी सांख्यिकी गणितामध्ये या तिघांव्यतिरिक्त आणखी काही सरासरी वापरल्या जातात. यातील एक उदाहरण क्रिकेट जगताशी जोडलेले आहे.

फलंदाजीची सरासरी

तुमचे कधी या गोष्टीकडे लक्ष गेले आहे का की एखाद्या फलंदाजाच्या नावासमोर जी फलंदाजीची सरासरी दिलेली असते ती ना मध्य असते, ना मध्यक आणि बहुलक सुद्धा नसते. चला बघू या ती नक्की कोणती सरासरी असते ते. महेंद्रसिंह धोनी हे भारतीय क्रिकेटमधले एक प्रसिद्ध आणि बहुचर्चित नाव आहे. तुमच्यातील कित्येकजणांना तो त्याचा खेळ आणि कप्तानगिरीसाठी आवडत असेल. जर आजच्या तारखेला एकदिवसीय कसोट्या खेळणाऱ्या भारतीय खेळाडूंची त्यांच्या फलंदाजीच्या सरासरीप्रमाणे एक यादी तयार केली, तर धोनी पहिल्या नंबरवर असेल आणि विराट कोहली दुसऱ्या नंबरवर.

तक्ता नंबर ३ मध्ये या दोन्ही खेळाडूंची आत्तापर्यंतची फलंदाजीची सरासरी दिलेली आहे. टीव्हीवर आणि वर्तमानपत्रांमध्ये याचप्रकारचे रेकॉर्ड दाखवले जाते. आपण एका गोष्टीवर विचार करू की एखाद्या फलंदाजाची क्षमता जोखण्यासाठी कशाप्रकारचे सांख्यिकीय मापन असले पाहिजे.

तक्ता क्रमांक ३ मध्ये तुम्ही बघाल की धोनीने आत्तापर्यंत एकूण २६२ सामने खेळले आहेत आणि एकूण ८४९९ धावा केलेल्या आहेत. जर प्रश्न विचारला की धोनीने प्रतिसामना सरासरी किती धावा केलेल्या आहेत तर तुम्ही एकूण धावांच्या संख्यांना एकूण सामन्यांच्या संख्यांनी भागून याचे उत्तर देऊ शकता. असे केल्यावर उत्तर मिळेल ३२.४३. खरंच ही संख्या धोनीच्या एकदिवसीय सामन्यांमधील फलंदाजीच्या कामगिरीचे योग्य दर्शन देते आहे का? थोडा विचार केल्यावर तुम्हाला याचे उत्तर नकारात्मकच मिळेल. स्पष्टच दिसते आहे की भलेही धोनी एकूण २६२ एकदिवसीय सामने खेळला

तक्ता क्र. ३						
खेळाडू	**सामने**	**खेळ्या**	**नाबाद**	**एकूण धावा**	**सर्वाधिक**	**सरासरी**
धोनी	२६२	२२८	६६	८४९९	१८३	५२.४६
कोहली	१५८	१५०	२३	६३५७	१८३	५१.४७

आहे पण त्याला प्रत्येक सामन्यात फलंदाजीची संधी मिळालीच असेल असे नाही. आता ज्या सामन्यांमध्ये खेळाडूने फलंदाजीच केली नसेल तर त्या सामन्यांना त्याच्या फलंदाजीच्या कामगिरीशी जोडण्यात काही मतलबच राहत नाही.

तक्त्यामध्ये तुम्ही बघाल की धोनी २६२ एकदिवसीय सामन्यांमध्ये फक्त २२८ च खेळ्या खेळला आहे. आणि याच खेळ्यांमध्ये त्याने ८४९९ धावा केलेल्या आहेत. मग आपण या धावांच्या संख्येला एकूण खेळींच्या संख्येने भागले तर धोनीच्या फलंदाजीच्या कामगिरीचे योग्य मूल्यमापन करू शकू का? असे केल्यावर उत्तर मिळेल ३७.२७. ही संख्या धोनीने प्रतीखेळी काढलेल्या धावांची सरासरी दाखवते आणि एखाद्या खेळाडूच्या धावा करण्याच्या क्षमतेची निदर्शक होऊ शकते. कोहलीच्या बाबतीत ही संख्या येईल ४२.३८ जी धोनीच्या प्रतिखेळी सरासरीपेक्षा जास्त आहे. परंतु आकडेवारीमध्ये आपल्याला हा सूचक अंक दिसून येत नाही. तक्त्यामध्ये दाखवलेली धोनीची सरासरी आहे ५२.४६, जी प्रतिखेळी धावांच्या ३७.२७ या सरासरीपेक्षा खूपच जास्त आहे.

खरे म्हणजे एखाद्या खेळाडूच्या फलंदाजीची कामगिरी फक्त त्याच्या धावा करण्याच्या क्षमतेवरून मोजली जाऊ शकत नाही; तर आणखी एक पैलू त्याची फलंदाजीमधील कामगिरी दर्शवतो, तो म्हणजे त्याचे फलंदाजी करताना नाबाद राहणे. आता, धोनी आणि कोहली, दोघांचीही सर्वाधिक धावसंख्या आहे १८३. परंतु कोहली एवढ्या धावा केल्यानंतर बाद झाला तर धोनी शेवटपर्यंत नाबाद राहिला. जर सामना संपलाच नसता तर धोनीने कदाचित आणखी धावा केल्या असत्या. पण असा आपण एक अंदाजच करू शकतो, त्याने किती धावा काढल्या असत्या हे आपण सांगूच शकत नाही. याच शक्यता आणि अंदाजांच्या आधारावर फलंदाजीची सरासरी काढली जाते. सरासरी काढताना, ज्यामध्ये खेळाडू बाद झाला आहे त्याच खेळ्या फक्त विचारात घेतल्या जातात. तक्त्यामध्ये तुम्ही बघाल की धोनी आत्तापर्यंत एकूण ६६ खेळ्यांमध्ये नाबाद

राहिला म्हणजेच एकूण १६२ (२२८-६६) खेळ्यांमध्ये तो बाद झाला. आता जर आपण धोनीने केलेल्या एकूण धावसंख्येला जितक्या खेळ्यांमध्ये तो बाद झाला त्या संख्येने भाग दिला तर आपल्याला तक्त्यामध्ये दिलेली सरासरी मिळेल. लक्षात ठेवा की ही एक अनुमानित सरासरी आहे, कारण याच्यामध्ये फक्त प्रत्यक्षात केलेल्या धावांची संख्याच विचारात घेतलेली नाही तर नाबाद राहिलेल्या स्थितीमध्ये खेळाडूकडून केल्या जाऊ शकणाऱ्या धावांचा अंदाजपण अंतर्भूत केलेला आहे.

या लेखामध्ये आपण बघितलं की केंद्रीय प्रवृत्तीसाठीची वेगवेगळी मापने वापरून आपण आकडेवारीबद्दल काही माहिती मिळवू शकतो, पण यांच्या व्यतिरिक्त अशी अनेक मापने आहेत ज्यांच्या मदतीने आपण आकड्यांचा अंदाज अजून चांगल्या पद्धतीने घेऊ शकतो. यावर चर्चा नंतर कधीतरी. तूर्त तरी एका प्रश्नाने या लेखाची समाप्ती करतो. मला आठवतंय जेव्हा मी पहिली-दुसरीत होतो तेव्हा आम्ही चार मित्र असायचो : राजेश, समीर, रामनरेश आणि मी. आमच्यामध्ये रामनरेश काहीसा वेगळा होता. तो आमच्यापेक्षा बराच उंच होता आणि त्याच्यामध्ये एक गोष्ट अशी होती जी बघून मी नेहमीच आश्चर्यचकित होत असे. त्याच्या दोन्ही हातांना आणि एका पायाला सहा-सहा बोटे होती. आता जर गणिताच्या शिक्षकांनी आम्हाला असा प्रश्न विचारला की माणसाच्या हाताला सरासरी किती बोटे असतात, तर चार मित्रांच्या आकडेवारीच्या आधारावर आम्ही काय उत्तर देऊ? माणसाच्या हाताला सरासरी ५.२५ बोटे असतात?

लेखक : **विवेक मेहता,** आय.आय.टी., कानपूरमधून मेकॅनिकल इंजीनियरिंगमध्ये पीएच.डी., एकलव्यच्या विज्ञान शिक्षण कार्यक्रमामध्ये फेलो.
अनुवादक : **संजीवनी आफळे**

सम-विषम

लेखक : किरण बर्वे

बऱ्याच दिवसांची वाट संपून पाऊस एकदाचा पडायला लागला होता. 'आम्ही मित्र' आणि शेखरदादा पावसाच्या रिपरिपीला कंटाळून घरातच बसलो होतो. सुहृद म्हणाला 'कोडी घाला'. शेखरदादाने जरासा विचार केला आणि म्हणाला ''चला एका सोप्या विषयावरची कोडी घालतो.''

''१, ३, ५ हे आकडे एकंदरीत १० वेळेला घेऊन त्या घेतलेल्या आकड्यांची बेरीज २५ करून दाखवा.''

उदाहरणार्थ १ चार वेळेला घेतले, ३ – चार वेळेला घेतले, ५ – दोन वेळेला घेतले म्हणजेच, १, ३, ५ ह्यांच्यातील एकंदर १० आकडे निवडले, त्यांची बेरीज केली. ४ + १२ + १० = २६. थोडक्यात हुकले.

आता तुम्ही वेगवेगळ्या प्रकारे १, ३, ५ दहा वेळा निवडून बघू शकता.

हिमांगीने १ – तीन वेळा, ३ – सहा वेळा, ५ – एक वेळा घेतले. बेरीज आली, ३ + १८ + ५ = २६.

सुहृदने १ – सहा वेळा, ३ – एक वेळा, ५ – तीनदा घेऊन बघितले. बेरीज आली ६ + ३ + १५ = २४.

२४, २६, २२, २८ अशा बेरजा येत होत्या पण २५ बेरीज काही केल्या येत नव्हती. शेखरदादा गालातला गालात हसत होता. अखेर थोड्या वेळाने तो म्हणाला, ''हे अशक्य आहे. कारण १० ही सम संख्या आहे. १, ३, ५ ह्या विषम संख्या आहेत. दोन विषम संख्यांची बेरीज नेहमी सम येते. आता ४ विषम संख्यांची बेरीज सम येईल का विषम येईल, सम येईल कारण पहिल्या दोन विषम संख्यांची बेरीज सम येणार. पुढच्या दोन विषम संख्यांची बेरीज सम येणार आणि सम आणि सम संख्यांची बेरीज सम येते. आता १० वेळेला विषम संख्यांची बेरीज नेहमी समच येणार.

१० विषम संख्या पहिली विषम संख्या वि१, दुसरी वि२, ... वि१० अशा दर्शवू. १० विषम संख्यांची बेरीज

वि१ + वि२ + वि३ + वि४ + वि५ + वि६ + वि७ + वि८ + वि९ + वि१०

अशी जोड्यांच्यात लिहूया. वि१ + वि२ = सम संख्या, वि३ + वि४ + वि५ + वि६, वि७ + वि८ + वि९ + १० ह्या सर्व सम संख्याच आहेत. आणि सम संख्यांची बेरीज नेहमी समच असते. म्हणून ह्या १० विषम संख्यांची बेरीज सम येईल. म्हणूनच १, ३, ५ यातील कोणत्याही प्रकारे १० संख्या निवडल्या तरी त्या सर्व विषमच असणार म्हणून त्यांची बेरीज समच असणार. २५ असणार नाही. ''

''ही आयडीया भारी आहे'' इति, हिमांगी, आभा, आर्या, ''एकदम कडक'' इति सुहृद, प्रकाश इ.

आता पुढचे कोडे.

''महेशने ९६ पाने असलेली वही आणली. प्रत्येक पृष्ठावर अनुक्रम घातले. वही १ ते १९२ पृष्ठांची झाली. किशोरने त्यातील २५ पाने फाडली आणि त्या २५ पानांवरील ५० आकड्यांची बेरीज केली. किशोरची ती बेरीज १९९० असू शकेल काय?''

ह्या वेळी ५ ते ७ मिनीटात सुहृद आणि हिमांगीने आपापसात चर्चा करून सांगितले, ''नाही, ती बेरीज १९९० कधीच असू शकणार नाही. प्रत्येक पानावर एक सम क्रमांक आणि एक विषम क्रमांक असणार आहे. त्यामुळे प्रत्येक पानावरील संख्यांची बेरीज विषम असणार आहे. व २५ पाने म्हणजे विषम संख्येची पाने आहेत. विषम वेळेला विषम संख्याची बेरीज नेहमी विषम येते. म्हणजेच ती बेरीज १९९० असू शकणार नाही.''

''बरोबर, बरोबर, आता शेवटचे कोडे. २२ पूर्णांक संख्यांचा गुणाकार १ आहे तर त्यांची बेरीज ० कधीच असणार नाही हे सिद्ध करा. ''

ह्या वेळी आभाने दोन मिनीटातच उत्तर दिले.

''पूर्णांक संख्यांचा गुणाकार १ आहे. म्हणजेच त्या पूर्णांक संख्या एकतर १ असतील वा –१ असतील. गुणाकार १ म्हणजे धन असणार आहे म्हणजेच सम वेळा –१ आणि उरलेलेही समवेळा १ असणार. १, आणि –१ अशा २२ संख्यांची बेरीज शून्य तेव्हाच येईल जेव्हा १, ११ वेळेला आणि –१, ११ वेळेला घेतले जातील पण त्यावेळेला गुणाकार –१ येईल.''

तर अशी सम आणि विषमची गंमत. छोट्या छोट्या निरीक्षणांतून गमतीदार व सुरस निष्कर्ष निघतात.

अजून एक गंमत, आकड्यांचीच बघु या. प्रश्न असा विचारला आहे की.

१ + २ + ३ + ४ + ५ + ६ ही एक बेरजेची मांडणी आहे. एकूण ५, + ची चिन्हे आहेत. त्यातील काही चिन्हांच्या जागी वजाचे चिन्ह घालून ह्या पदावलीचे, मांडणीचे, उत्तर ० आणून दाखवा. १ च्या आधी सुद्धा – चिन्ह लिहू शकू. ही मूळ बेरीज २१ आहे. ही बेरीज कमी करायला एका ठिकाणी अधिक चिन्हाचे जागी वजा चिन्ह करू.

५ चे चिन्ह बदलून वजा करू. आता बेरीज झाली.

१ + २ + ३ + ४ – ५ + ६ = १० – ५ + ६,

१ + २ + ३ + ४ – ५ + ६ = ११. वा ! बेरीज खूप कमी झाली. अजून कमी करायची तर चारचे चिन्ह बदलू, मांडणी होईल, १ + २ + ३ – ४ – ५ + ६ = ३. मग २ चे आणि १ चे चिन्ह बदलले की झाले, असे वाटू शकते पण तसे नाही. कारण १ वजा केला की २ ने बेरीज कमी होते. कारण अगोदर त्या बेरजेत + १ होता तो काढला, उत्तर एकने कमी झाले आणि नंतर परत आपण एक कमी करणार म्हणजे अजुन एकाने बेरीज कमी, १ चे चिन्ह बदलले की बेरीज दोन ने कमी होते ! ह्याच पद्धतीने +२ चे –२ केले की बेरीज २ x २ ने म्हणजेच ४ ने कमी होते. कोणत्याही अंकाचे अधिक चिन्ह उणे केले, की त्या अंकाच्या दुप्पट इतकी बेरीज कमी होते. हे समजून घेतले की पुढचे सोपे आहे. दर वेळेला बेरीज सम संख्येने कमी होते. आपल्या प्रत्येक क्रियेमुळे सम संख्येनेच बेरीज कमी होत जाणार. मूळ बेरीज आहे –

१ + २ + ३ + ४ + ५ + ६ = ३ + ७ + ११ (दोनचे गट करून बेरीज) आले २१. २१ ही विषम संख्या तीतून दर वेळेला आपण सम संख्या वजा केली की येणारे उत्तर विषमच असणार. अर्थात आपण कितीही वेळेला चिन्हांची अदलाबदल केली तरी बेरीज विषम राहणार! म्हणजे ० येऊ शकणार नाही.

आता अगदी अशाच प्रकारच्या दोन प्रश्नांची उत्तरे विचारपूर्वक द्या.

१ + २ + ३ + ४ + ५ + ६ + ७ + ८ + ९ + १० ह्या बेरजेतील अधिकच्या जागी उणे चिन्ह घालून बेरीज ० येईल का? खाली दिलेल्या पायरीत गाळलेल्या जागा भरा, मग तुम्हाला उत्तर मिळेल.

समजा +५ च्या जागी –५ केले तर बेरीज ____ ने कमी होते.

कोणताही अंक अधिक करण्याच्या ऐवजी वजा केला तर मांडणीची किंमत ___ संख्येने कमी होते (सम / विषम)

१ ते १० संख्यांची बेरीज ५५ आली, ५५ ही ___ (सम / विषम) आहे,

त्यातून सम संख्या कमी करत गेलो की येणारी संख्या ___ (सम / विषम) आहे.

० सम संख्या आहे, त्यामूळे अशा प्रकाराने चिन्हे बदलून बेरीज ० करता येणार नाही.

पुढचे कोडे असेच आहे, १ + २ + ३ + ४ + ५ + ६ + ७ + ८ + ९ + १० ह्या बेरजेतील अधिकच्या जागी उणे चिन्ह घालून बेरीज २ येईल का? १ + २ + ३ + ४ + ५ + ६ + ७ + ८ + ९ + १० ह्या बेरजेतील अधिकच्या जागी उणे चिन्ह घालून बेरीज सम संख्या येईल का?

(बेरीज सम का विषम? प्रत्येक बदलाने येणारे उत्तर सम संख्येने बदलेल की विषम?)

आता तुम्ही नक्कीच उत्तर देऊ शकाल.

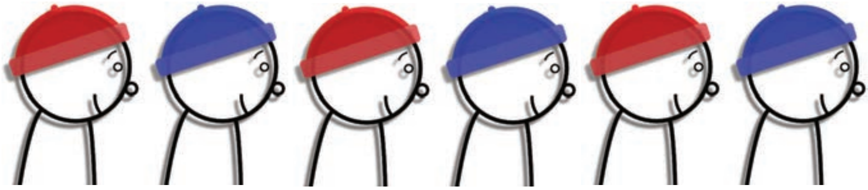
असाच एक प्रश्न,

१ + २ + ३ + ४ + ५ + ... + १० + ११ = न ह्या मांडणीत + आणि – चिन्हांची अदलाबदल करून ३ हे उत्तर येऊ शकेल का?

अखेरीस एक रक्तलांछित कोडे चर्चेस घेऊ. एक राजा होता त्याचे नाव क्रूरकर्मा. नावाप्रमाणेच साध्या गुन्ह्यांसाठी मृत्युदंड देत असे. त्यात सुद्धा वेगळ्या वेगळ्या अटी घाले आणि मजा घेत असे.

एका दिवशी ६ कैद्यांना फाशीची शिक्षा दिली होती. त्याने अट अशी घातली, सर्व कैद्यांना एका मागोमाग उभे केले. लाल आणि निळ्या रंगांच्या टोप्यांपैकी एक एक प्रत्येकाच्या डोक्यावर घातली जाईल. कोणालाही आपल्या डोक्यावर घातलेल्या टोपीचा रंग माहीत नाही. एका मागोमाग उभे असताना कोणीही कोणाशी बोलायचे नाही. जे आपल्या डोक्यावरील टोपीचा रंग बरोबर सांगतील, ते जिवंत राहतील. चुकला की फाशी. आता डोळे उघडे असल्यामुळे समोरच्या सगळ्यांच्या टोपी वरचे रंग माहीत असले तरी पुढच्याला थेट सांगता येणार नाहीत. हे नियम त्याने सर्वांना सांगितले. ओळीत उभे राहताना त्यातील म्हातारा आणि बुद्धिमान सुमेध नावाचा कैदी सर्वात शेवटी उभा राहिला. त्याने सर्व कैद्यांना उभे राहताना एक गोष्ट सांगितली आणि जर तुम्ही विचार केलात तर तुम्ही सगळे जिवंत रहाल, मी जिवंत रहायची शक्यता निम्मी असेल. पुढे वाचायला लागायच्या आधी थोडा वेळ विचार करा, त्या वृद्ध व्यक्तीला वर समजावलेला, सम विषमचे गुणधर्म व उपयोग चांगल्या प्रकाराने अवगत होते.

मग सुचली का युक्ती? सुमेधने सांगितले, ‘माझ्या समोरच्या तुमच्या टोप्यांचे रंग



मला दिसणार आहेत. त्यामुळे मी काय सांगतो ते ऐका. जर माझ्यासमोर तुमच्या सर्वांच्या टोप्यात सम संख्येने लाल टोप्या असतील, तर मी माझ्या टोपीचा रंग लाल असे सांगेन, जर समोर विषम संख्येने लाल टोप्या असतील तर माझ्या टोपीचा रंग निळा सांगेन. मी सांगितलेल्या माझ्या टोपीचा रंग लक्षात घ्या आणि तुमच्या समोरच्या टोप्यांचे रंग बघून तुमच्या डोक्यावरील टोपीचा रंग तुम्ही सांगा.' हे बोलणे होते न होते तोच त्यांना डोळे बंद करून एका मागोमाग उभे केले लाल किंवा निळी टोपी त्यांच्या डोक्यावर घातली, आणि त्यांचे डोळे उघडले. सुमेधने त्याच्या टोपीचा रंग सांगितला, तो सुटला का माहीत नाही. पण त्याने सांगितलेले नीट लक्षात घेतल्यामुळे पुढच्या सर्व कैद्यांनी आपल्या डोक्यावरील टोपीचा रंग बरोबर ओळखला. सुमेध जिवंत राहिला का नाही हे सांगता येत नसले तरी, पुढचे सर्व कैदी आणि हे कोडे वाचणारे आपण सर्व त्याला कधीच विसरू शकणार नाही.

आता तुम्ही अजून एकदा वाचायचे थांबवा, आणि असे कसे झाले असेल ते शोधा.

लेखक : **किरण बर्वे,** मो. – ९४२३० १२०३४

रामानुजन - हार्डी नंबर

ब्रिटीश गणितज्ञ जी. हार्डी भारतीय गणितज्ञ श्रीनिवास रामानुजन यांना भेटण्यासाठी हॉस्पिटलमध्ये गेले. हार्डी यांच्याच शब्दात, ''मला आठवतंय की ते आजारी होते तेव्हा मी त्यांना पटणी येथे भेटायला गेलो होतो. मी एका टॅक्सीने गेलो होतो आणि त्या टॅक्सीचा १७२९ हा नंबर मला फारच कंटाळवाणा वाटला. मी आशा केली की हा आकडा काही अशुभ संकेत तर देत नाही ना.''

''नाही'' ते म्हणाले. ''खरं तर हा एक अतिशय मनोरंजक आकडा आहे. तो सर्वात लहान आकडा आहे जो दोन आकड्यांच्या घनांची बेरीज दोन वेगवेगळ्या पद्धतीने दाखवतो.''

ज्यांना माहीत नाही त्यांच्यासाठी, $१९२७ = १^३ + १२^३ = ९^३ + १०^३$

१७२९ ह्या आकड्याला रामानुजन – हार्डी नंबर असे संबोधले जाते.

कक्षेची भूमिती

लेखक : दिलीप साठे

आपल्या सौरमालेतील सर्व ग्रह सूर्याभोवती जवळ जवळ एकाच पातळीत भ्रमण करीत आहेत. बुध, शुक्राच्या कक्षा पृथ्वीच्या कक्षेच्या आत आहेत व म्हणून कधी कधी बुध किंवा शुक्र सूर्याच्या प्रखर बिंबावर एखाद्या माशी सारखे इकडून तिकडे जाताना दिसतात. यालाच त्या ग्रहाचे संक्रमण म्हणतात. म्हणजे हे दोन्ही ग्रह पृथ्वीपेक्षा सूर्याला जवळचे आहेत याचा उत्तम पुरावा म्हणजे या ग्रहांचे ते संक्रमण पृथ्वीवरून दिसते. याचा आणखी अर्थ असा की मंगळावरून आपल्याला बुध, शुक्रासारखे पृथ्वीचे संक्रमण सुद्धा दिसेल.

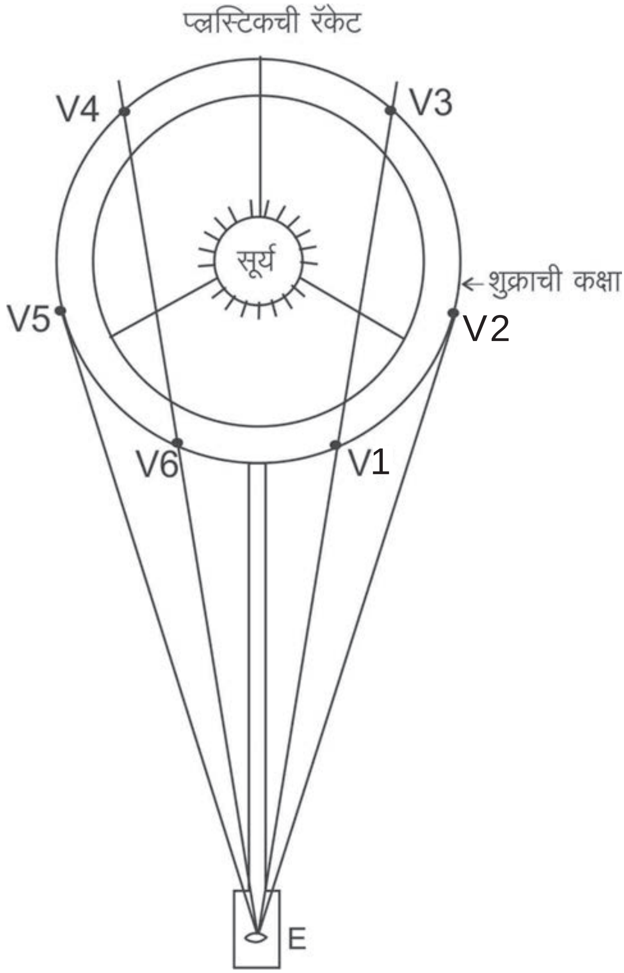
एखाद्या चित्रपटगृहात आपल्या समोर उंच माणूस बसला तर तो समोरच्या पडद्यावर संक्रमण करतो व आपल्याला जागा बदलावी लागते.

पण आता शुक्राचे संक्रमण २११७ साली होणार म्हणजे पुढच्या तीन, चार पिढ्यांना संक्रमण दिसणार नाही. मग त्यांनी शुक्र किंवा बुध पृथ्वीपेक्षा सूर्याला जवळ आहेत हे कसे सिद्ध करायचे? याचे उत्तर आता आपण भूमितीच्या वर्तुळाच्या साहाय्याने देऊ. प्रथम आपण आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे एक मॉडेल करू.

आकृतीत दाखविल्या प्रमाणे लहान मुलांच्या खेळण्यातील प्लॅस्टिकची रॅकेट घ्यावी. त्याच्या गोलाकार कडेवर V1, V2, V3, V4, V5 अशी छोटी भोके पाडावीत. एखाद्या गरम खिळ्याने अशी भोके सहज पाडता येतात. रॅकेटच्या मुठीच्या टोकावर एक खिळा मारावा. हा खिळा म्हणजे आपल्या पृथ्वीवरील निरीक्षक E. E ला एखादा दोरा किंवा इलॅस्टीकचा बँड लावावा. दुसरे टोक सुट्टे ठेवावे. रॅकेटच्या मध्य बिंदूवर एक लाल कागद किंवा लेबल सूर्य म्हणून चिकटवावे. झाले आपले मॉडेल तयार. आता ते कसे वापरायचे पाहू.

सूर्य रॅकेटच्या मध्यावर व शुक्राची कक्षा म्हणजे रॅकेटची कड. त्यामुळे शुक्र कधी कक्षेच्या V1 बिंदु वर तर कधी V2 वर तर कधी V5 वर असेल. त्यामुळे पृथ्वीवरच्या

निरीक्षकाची दृष्टीरेषा कधी EV1 असेल, तर कधी EV2 तर कधी EV5 . म्हणजे कधी दृष्टीरेषा वर्तुळाची स्पर्शिका होईल तरी कधी जीवा. यावरून काही गोष्टी सिद्ध होतात. एक म्हणजे शुक्र आपल्याला रात्रभर आकाशात दिसणार नाही. एक तर तो सूर्यास्तानंतर काही वेळात मावळेल किंवा सूर्योदयाआधी काही वेळ आपल्याला दिसेल. हे प्रत्यक्षात आपण पाहतो म्हणूनच शुक्राला Morning star किंवा Evening star म्हणतात.



या सोप्याशा मॉडेलच्या साहाय्याने भूमिती व खगोलाची चपखल घडी घालता येते!

समजा आपण सूर्यापासून जवळ आहोत, आणि ग्रह सूर्यापासून आपल्यापेक्षा लांब अंतरावर आहे. याचे मॉडेल तुम्हाला करता येईल का? कसे? लांबचे ग्रह आपल्याला आकाशात कोणकोणत्या भागात दिसतील?

■■

लेखक : **दिलीप वि. साठे,** निवृत्त शिक्षक, मो. ९४२२३२१६६३.

घाला घड्या कागदाच्या, शिका संकल्पना गणिताच्या

लेखक : व्ही. एस. एस. सास्त्री • **अनुवाद :** संजीवनी आफळे

कोणत्याही छोट्या मुलीला एखाद्या विशिष्ट प्रकारे कागदाच्या घड्या घालायला सांगा, लगेच ती म्हणेल, पण का करू मी ते? कागदाच्या घड्या घालणे हे एक कंटाळवाणे, नावडते आणि तापदायक काम म्हणून बघितले जाते. पण त्याच मुलीला तुम्ही कागदाच्या घड्या घालून नाव किंवा पक्षी बनवायला सांगा, तिला त्यासाठी तुम्ही थोडेसे मार्गदर्शन करा आणि मग बघा; ती ते लगेच करायला सुरुवात करेल आणि आनंदाने शिकेल. ते कागदी मॉडेल तयार झाल्यावर, तिला सांगण्याचा प्रयत्न करा की ते मॉडेल उलगडताना तुला हा 'कोन' दिसेल, हे 'क्षेत्रफळ' दिसेल, ही 'रेष' दिसेल वगैरे वगैरे. या मध्ये तिला नक्कीच काहीतरी 'शोध'लागल्याचे समाधान मिळेल. ही प्रक्रिया आता आनंददायी होईल.

कागदाच्या घड्या घालून निरनिराळे आकार तयार करणे या कलेला 'ओरिगामी' असे म्हटले जाते. काही कागदी मॉडेल्समध्ये शेकडो घड्या असतात आणि काही गुंतागुंतीच्या मॉडेल्समध्ये दोन किंवा तीन वेगवेगळे घडी केलेले आकार एकत्र जोडलेले असतात.

ओरिगामीमधून गणित शिकणे हा एक चित्तथरारक प्रकार आहे; ज्यामध्ये मुलांच्या डोळ्यांसमोर अक्षरशः ते आकार तयार होताना दिसतात. हा अभ्यासपूर्ण प्रवास त्यांना गणितातील अवघड संकल्पना मजेशीर रीतीने समजायला मदत करतो. ओरिगामीमधील अवघड मॉडेल्स आपण सोडून देऊ आणि काही सोप्या मॉडेल्सकडे वळूयात. मी या साठी आठ पेक्षा कमी घड्या असलेली ओरिगामी मॉडेल्स पसंत करतो. साधीसोपी आणि छोटी ओरिगामी मॉडेल्स गणित शिकण्यासाठी आदर्श आहेत.

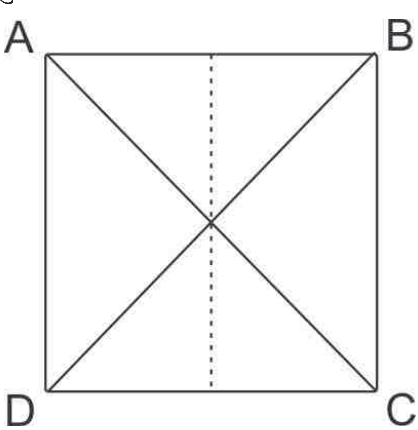
आपल्या देशामध्ये ओरिगामी ही एक लोककला म्हणून ओळखली जाते, पण खूप मोठ्या प्रमाणावर ती वापरात नाही. हल्ली मुलांना कागदाच्या घड्या घालून नाव, कप किंवा पक्षी करायला कोणीच शिकवत नाही. हे त्यांना त्यांच्या शाळेत मित्रांकडून शिकायला मिळाले तर ती नशीबवानच म्हणायची.

इथे मी काही उदाहरणे दिली आहेत ज्यामध्ये गणितातील संकल्पना साध्या ओरिगामीची मॉडेल्स वापरून समजावता येतील.

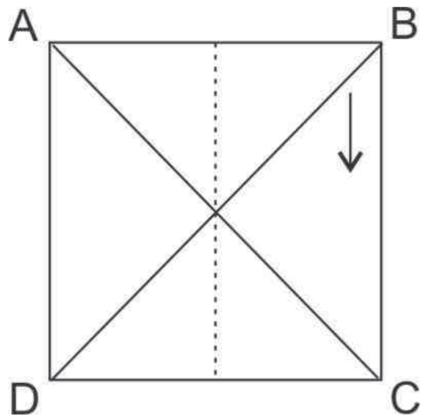
कागदी हंस

खाली दिलेल्या आकृत्या वापरून हंस बनवा. येथे वापरलेल्या खुणा साध्या आणि सहज समजण्यासारख्या आहेत.

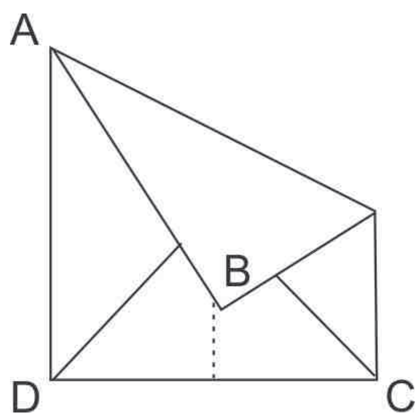
एक १० सेंमी x १० सेंमी मापाचा चौरसाकृती कागद घ्या जो कर्णांमध्ये दुमडलेला असेल.



चौरसाला दाखवल्याप्रमाणे अर्धे दुमडा आणि उलट करा.



B मध्यरेषेवर येईल अशी घडी A मधून घाला.



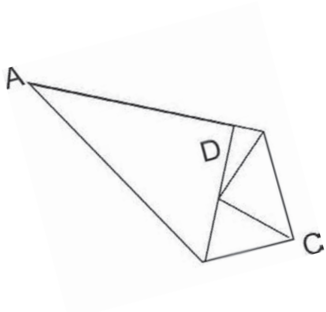
ओरिगामी

ओरिगामी ही एक प्राचीन जपानी कला आहे. हा शब्द 'ओरि' म्हणजे घडी घालणे आणि 'कामी' म्हणजे कागद यापासून आलेला आहे. पूर्वीच्या काळी ओरिगामी मॉडेल्स काही धार्मिक विधींमध्ये वापरली जात असत. पण नंतर ती फक्त मजा आणि आनंदासाठी वापरली जाऊ लागली. असं म्हणतात की ओरिगामी ही कला चीन मधून जपान मध्ये आली. तेथे अंत्यविधीच्या वेळेला आत्म्याला या जगापासून दूर नेण्यासाठी कागदी नावा ठेवलेल्या असत.

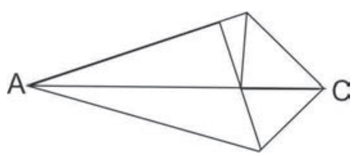
पुढे एकोणीसाव्या शतकातल्या अमेरिकी हस्तक्षेपानंतर जपानी कला आणि हस्तकलांकडे पश्चिमी देशांचे लक्ष गेले आणि ओरिगामी म्हणजेच कागदाला घड्या घालण्याची कला असे मानले जाऊ लागले. आधी ही फक्त 'कागदी आकार' तयार करण्याची कला म्हणून माहिती होती. त्यानंतर घड्या घालण्याची कला खूपच वेगाने विकसित झाली. सध्या तेथे अनेक ओरिगामी संस्था आहेत आणि जादुगार सुद्धा त्यांच्या कार्यक्रमामध्ये याचा वापर करतात. ओरिगामीचे वार्षिक उत्सव जगभरात साजरे केले जातात. आता निरनिराळे आकार तयार करण्यासाठी कागदाच्या घड्या घालण्याचे संगणकीय कार्यक्रमसुद्धा तयार केलेले आहेत.

इतरही काही संस्कृतींमध्ये कागदी घड्या घालण्याची कला होती. दक्षिण स्पेन मध्ये मूर म्हणून ओळखले जाणारे अरब बहुसंख्येने होते. हे लोक दागिने बनवणे, धातुकला आणि दगडी कलाकुसर करत असत. ते इस्लाम धर्माचे होते. त्यामुळे त्यांच्या कलांमध्ये मानवी आकृत्या नसायच्या. त्यांच्या कलाकृतींमध्ये रेषा, कोन आणि भूमितीतील आकृत्यांची रेलचेल असे. हे कारागीर भूमितीतील आकृत्या कागदी घड्यांमधूनच शिकत असत. ते गणितातील 'Tessellations' वर म्हणजेच रचनांची वारंवारता यावर अवलंबून असत. त्यांच्या सर्व हस्तकलांमध्ये एकच नक्षी परत परत वापरली जात असे. मुघलांच्या वेळेला या मूर लोकांना इमारती सजवण्यासाठी दिल्ली आणि आग्र्याला बोलावण्यात आले होते. मुघल स्मारकांमधील खिडक्यांवर दिसणारे नाजूक नक्षीकाम या मूर लोकांनीच केलेले आहे. ओरीगामीमध्ये स्पेनमधील घड्या घालण्याच्या पद्धतींना मूरीश पद्धती म्हटले जाते.

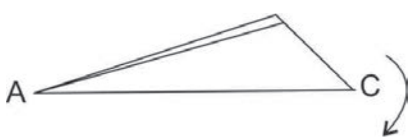
बिंदू D घडी घातलेल्या रेषेवर दुमडा. घडी घातलेल्या रेषेवर AD आणा. तुम्हाला अशी आकृती मिळेल.



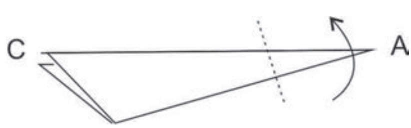
आता A-C या बिंदुंमध्ये घडी घाला.



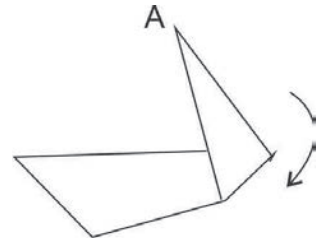
मॉडेल फिरवा.



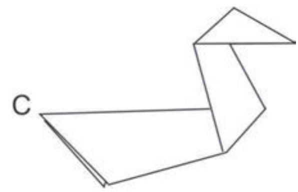
A ची विरुद्ध दिशेने घडी घाला reverse फोल्ड. मान तयार करा.



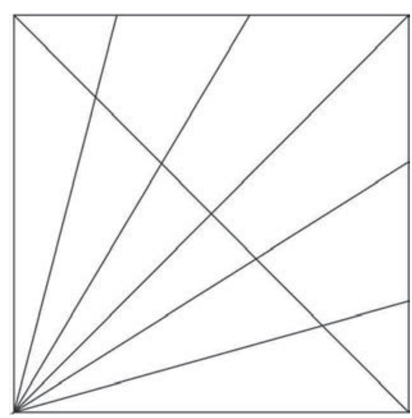
बिंदू A पुढे आणा. मागून पुढे घडी, reverse फोल्ड. चोच तयार होईल.



कागदी हंस तयार.



चौरस कागदाला घड्या घालून हंस तयार करताना मूल त्याच्याशी खेळू लागते. ते कधीतरी मॉडेल फाडेलही! मुलाला कागदाच्या घड्या मोडायला सांगा, ज्यामुळे पुन्हा चौरसाकृती कागद तयार होईल. पण त्या घड्यांच्या खुणा त्या कागदावरती तशाच



सुंदर राव – भारतातील ओरीगामीचे अग्रेसर मार्गदर्शक

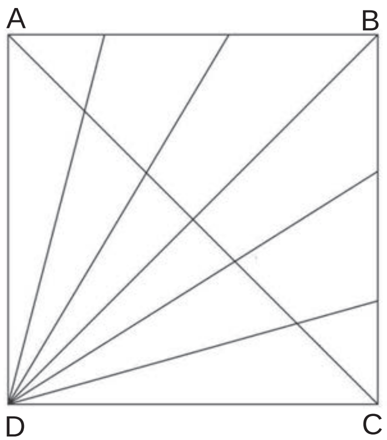
सुंदर राव हे १८७० मध्ये रोयापेट्टा हायस्कूल, चेन्नई येथे मुख्याध्यापक होते. ते नक्कीच एक चांगले गणित शिक्षक असावेत. असे सांगितले जाते की त्यांच्या निवृत्तीनंतर ते एकदा स्पेन्सर डिपार्टमेंट स्टोअरमध्ये त्यांच्या नातवासाठी भेटवस्तू घेण्यासाठी गेलेले असताना एक खोका दिसला ज्यामध्ये रंगीत कागद आणि त्या कागदाच्या घड्या घालून निरनिराळे प्राणी, पक्षी, वगैरे आकार कसे बनवायचे ते सांगणारे एक छोटेसे पुस्तक होते. पण गणित शिक्षक असलेल्या सुंदर रावांना कागदाचे मॉडेल उघडल्यावर तयार होणारे कोन, रेषा आणि क्षेत्रे दिसली. हळूहळू त्यांनी कागदातून तयार होणाऱ्या रचना आणि त्यांनी आयुष्यभर शिकवलेली गणितातील प्रमेये व रचना यांची सांगड घालण्यास सुरुवात केली.

त्यांनी कागदाच्या घड्या घालून तयार होणाऱ्या रचनांबद्दल लिहून ठेवण्यास सुरुवात केली. त्यांनी संपूर्ण भूमितीच्या अभ्यासक्रमाचा परामर्श घेतला. यातूनच एक सुरेख पुस्तक 'Geometric Constructions in Paper Folding' आकाराला आले आणि १८९३ मध्ये प्रकाशित करण्यात आले. हे याप्रकारचे पहिलेच पुस्तक होते ज्याने जगभरातील गणितज्ञांचे व शिक्षकांचे लक्ष वेधून घेतले. एका जर्मन मासिकातील विवेचनावरून अमेरिकेतील मॅथेमॅटिक्स टीचर्स असोसिएशनला या पुस्तकाबद्दल कळले. त्यांनी दोन उत्तम गणित शिक्षकांना अमेरिकेतील वाचकांसाठी हे पुस्तक सुधारित करण्यास सांगितले. या आवृत्तीचे आत्तापर्यंत ४७ वेळा पुनर्मुद्रण झाले आहे आणि अजूनही जगभरात त्याच्या आवृत्त्या निघत आहेत.

पण हे अत्यंत परिणामकारक पुस्तक जेथील मुलांसाठी सुंदर रावांनी प्रकाशित केले त्या भारतामध्ये ते कोणालाही माहिती नाही. ज्यांना आवड आहे त्यांच्यासाठी हे पुस्तक www.arvindguptatoys.com या वेबसाईटवरून विनामूल्य उपलब्ध आहे.

राहिलेल्या असतील. सरळ रेषा, क्षेत्रफळ, कोन, वगैरे वगैरे. या घड्यांच्या खुणांवरती पेन्सिलीने रेषा मारा ज्यामुळे त्या उठून दिसतील.

मग तुम्हाला हे दिसेल.



या आकृतीत कोन ADC =९०°. याचे प्रत्येकी १५° चे ६ भाग झालेले आहेत. आता हे ६ कोन बघू यात. आपल्याला ६ कोन मिळतात. (९०° च्या व्यतिरिक्त १५°, ३०°, ४५°, ६०° व ७५°) आणि आपल्याला ते मोजण्यासाठी कोनमापकाची गरज पडत नाही. हे मुलांना खूपच विस्मयकारक वाटते.

हेच मॉडेल खालील संकल्पना स्पष्ट करण्यासाठी सुद्धा वापरता येते.

१. कोनाचे विभाजन (Division of angles)
२. लघुकोन आणि विशालकोन (acute and obtuse angles)
३. लघुकोन त्रिकोण (acute angle triangle)
४. विशालकोन त्रिकोण (obtuse angle triangle)
५. समद्विभूज त्रिकोण (Isosceles triangle)
६. समभूज त्रिकोण (Equilateral triangle)
७. समद्विभूज काटकोन त्रिकोण (Isosceles right angle triangle)
८. त्रिकोणाच्या तीन कोनांची बेरीज १८०° असते.
९. त्रिकोणाच्या दोन कोनांची बेरीज त्रिकोणाच्या बाह्यकोनाइतकी असते.
१०. संगत कोन (corresponding angles)

म्हणजेच एका साध्या कागदी हंसापासून गणितातल्या दहा पेक्षा जास्त संकल्पना स्पष्ट करता येतात. अशी

अल्बर्ट विद्यापीठातील ओल्सन या गणितज्ञाला अमेरिकेतील नॅशनल कौन्सिल ऑफ टीचर्स ऑफ मॅथेमॅटीक्स यांनी गणित आणि कागद या विषयावरील सर्व माहिती गोळा करण्यासाठी नेमले. या गणितज्ञाने तोपर्यंत प्रकाशित झालेल्या सर्व शोधनिबंधाचे संदर्भ घेऊन एक साठ पानी पुस्तिका लिहीली. या पुस्तिकेची भारतीय आवृत्ती मॅथेमॅटीकल सायन्स ट्रस्ट सोसायटी, सी–७६६, न्यू फ्रेंड्स कॉलनी, नवी दिल्ली, ११००६६ येथे उपलब्ध आहे.

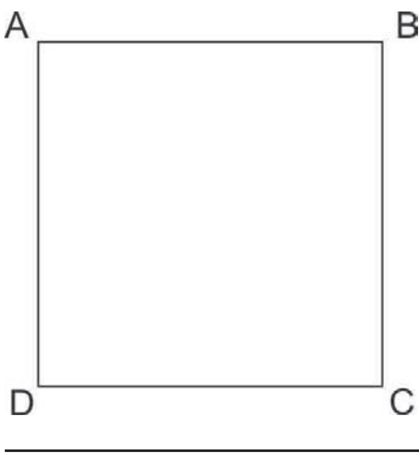
गणितातल्या अभ्यासक्रमाशी निगडीत इतर अनेक मॉडेल्स आहेत. मुलांनी तयार केलेली शेकडो स्वस्त आणि मस्त मॉडेल्स या संकल्पना समजण्यासाठी वापरता येतील.

कागदाच्या घड्यांपासून सप्तकोन

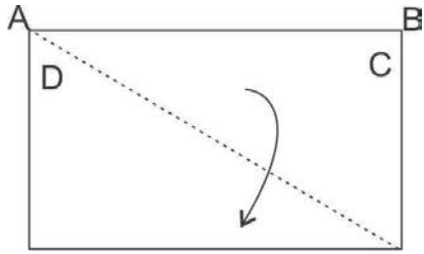
सप्तकोन (सात बाजू असलेली बहुभुजाकृती) तयार करणे हे एक फार अवघड काम आहे. कारण सप्तकोनाचा अंतर्गत कोन हा १२८.५७° असतो. हा कोन कोणत्याही कोन मापकाच्या मदतीने अचूकपणे मोजणे शक्य नाही. पण एकाच मापाच्या सात काड्या व्यवस्थित मांडून किंवा कागदावरती बऱ्याच प्रयत्नांनी सात रेषा आखून तुम्ही सप्तकोन तयार करू शकता.

पण ओरिगामीच्या मदतीने १२८.५७° हा कोन अगदी सहज मिळवता येतो. खाली दिलेल्या पद्धतीप्रमाणे एका चौरस कागदापासून हा कोन मिळवता येतो.

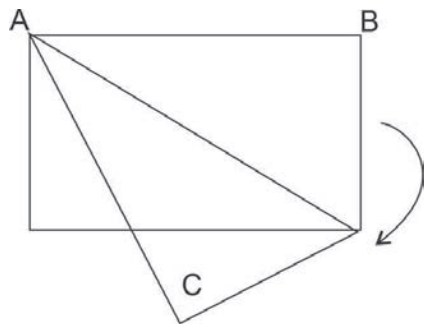
ABCD हा चौरसाकृती कागद घ्या.



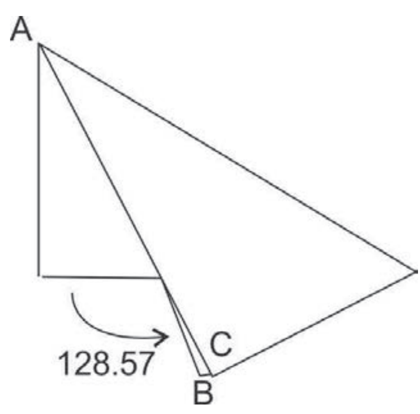
AB वरती CD दुमडा.



बिंदू A मधून सुरु होणाऱ्या कर्णात चौरस दुमडा.



१२८.५७° हा कोन तयार झाला.



याप्रकारे घड्या केलेले असे ७ आकार जोडून आपण सप्तकोन तयार करू शकतो.

भविष्यात आपण अशा एका शाळेची कल्पना करू शकतो जेथे खालच्या वर्गांसाठी ओरिगामी ही गंमतीसाठी शिकवली जाते. मुले वर्षभरात ७ ते ८ मॉडेल्स शिकू शकतात. हीच मॉडेल्स वापरून वरच्या वर्गांसाठी गणित शिकवता येईल. मग शिकणे हे ओझे असणार नाही. आणखी वरच्या वर्गांसाठी सुद्धा कागदी घड्या घालून गणित शिकणे शक्य आहे.

खरंतर कर्नाटक राज्य विज्ञान परिषद, बंगलोर यांनी दहावी पर्यंतच्या मुलांना गणित शिकवण्यासाठी 'Desk Book on Mathematics through Origami' हे पुस्तक प्रकाशित केले आहे.

आझम प्रेमजी फौंडेशनच्या Learning curve, मार्च २०१० अंकातून साभार.

लेखक : **व्ही. एस. एस. सास्त्री,** हे एक बँक ऑफिसर असून त्यांनी गणित व त्याच्याशी संबंधित प्रकल्पांची बारा पुस्तके लिहिली आहेत. त्यांचे विज्ञान प्रसार, दिल्ली यांनी प्रकाशित केलेले 'Origami Fun and Mathematics' हे पुस्तक दहावीपर्यंतच्या मुलांना कागदी आकार वापरून गणित शिकविण्यासंबंधी आहे. त्यांनी शिक्षकांसाठी ३०० पेक्षा जास्त कार्यशाळा घेतल्या आहेत. एरो मॉडेलिंग, किरीगामी आणि पतंग हे त्यांचे इतर आवडीचे विषय आहेत. त्यांचा संपर्क vsssastry@gmail.com

अनुवाद : **संजीवनी आफळे**

भागाकार समजावताना

लेखिका : पद्मप्रिया शिराळी • **अनुवाद :** यशश्री पुणेकर

लहान मुलं गणित शिकताना बेरीज आणि गुणाकार त्यामानाने चटकन शिकतात पण वजाबाकी आणि भागाकार समजणं त्यांना जरा अवघडच जातं. विशेषत: भागाकारात नक्की कशाने भागायचे आहे. कशाला भागायचे आहे यामध्ये त्यांचा गोंधळ होतो. भागाकारात शून्य आकडा असेल तर त्याच्या स्थानिक किंमतीचाही विचार करावा लागतो. म्हणजेच मुलांना भागाकार शिकवताना स्थानिक किंमत संकल्पना स्पष्ट असणे गरजेचे आहे. पण बऱ्याचदा शिक्षक या महत्वाच्या मुद्याकडे दुर्लक्ष करतात. स्थानिक किंमत समजल्याशिवाय भागाकारातील पदांची योग्य मांडणी करणं जमणारच नाही. यासाठी मुलांना भागाकार म्हणजे काय आणि स्थानिक किंमत म्हणजे काय हे समजणं अत्यंत आवश्यक आहे.

एकदम विषयाला हात न घालता मुलांकडून काही छोटे छोटे खेळ / उपक्रम करून घेतले तर त्यांना संकल्पना स्पष्ट व्हायला मदत होईल. इथे असे उपक्रम देत आहोत. त्यातून मुलांना भागाकार म्हणजे – १) समान वाटणी २) वारंवार वजाबाकी हे चांगल्याप्रकारे समजू शकेल.

उपक्रम १ – समान गटात विभागणी

- जमिनीवर दोन समान लांबीचे रेषाखंड काढा. मुलांना त्या दोन्ही रेषाखंडांवर समान संख्येत उभं रहायला सांगा. (इथे मुलांची संख्या सम असेल असं बघा) समोरासमोर उभं राहून एकमेकांशी शेकहॅड करायला सांगा.
- आता तीन मोठी वर्तुळ काढा. या तीन वर्तुळात मुलांची समान संख्या येईल अशी विभागणी करा. (मुलांची संख्या तीनच्या पटीत असू दे.) प्रत्येक

वर्तुळातील मुलांची संख्या ती समान असल्याची खात्री मुलांना करू दे.

- एक मोठा चौरस आखून घ्या. मुलांचे चार गट करून चौरसाच्या प्रत्येक टोकावर एकेक गटाला उभं करा. चारही गटात मुलांची संख्या समान हवी.

ही विभागणी मुलांना स्वत: करू दे. सुरुवातीला त्यांचा गोंधळ उडेल पण नंतर त्यांना त्याची मजा घेता येईल आणि समान विभागणीची संकल्पना समजेल. उदा. एकेक करून मुलांनी रेषेवर किंवा वर्तुळात जायचं आणि सर्वात शेवटी संख्या समान आहे ना हे मोजायंच.

उपक्रम २ – वस्तूंची समान विभागणी

साहित्य – कागदाचे चौकोनी तुकडे, स्ट्रॉ आणि रबरबँड, रंगीत बटणं, छोट्या लाकडी खुंट्या आणि भोकांचा तक्ता, बिया, गोट्या.

- चार मुलांना बिया किंवा गोट्या वाटून घ्यायला सांगा.
- कागदी डिश किंवा वाटीत ठेवल्या तरी चालेल.

- दुसऱ्या गटाला स्ट्रॉचे वाटप करून घेऊ दे.
- कागदाचे चौकोनी तुकडे एका रांगेत मांडायला सांगा. प्रत्येक रांगेत तुकड्यांची संख्या समान असायला हवी.

उपक्रम १ आणि २ हे बऱ्याच वेळा घ्यावे लागतात. मुलांना समान वाटपाची संकल्पना समजली की ती या गोष्टी पटापट करू लागतात. भागाकाराचा त्यांचा पाया पक्का होतो.

उपक्रम ३ – भागाकार म्हणजे पुन्हा पुन्हा वजाबाकी.

साहित्य – मणी, स्ट्रॉ.

एका मुलाला काही मणी द्या, समजा २०. प्रत्येक वेळी त्यातले दोन मणी बाजूला काढायचे आणि असे किती वेळा काढले ते मोजायचे. शेवटी त्याला नोंद करू दे – २० मणी – त्यातले २/२ मणी १० वेळा काढले. वेगवेगळ्या संख्या घेऊन हीच कृती पुन्हा पुन्हा करू दे. पण बाकी उरायला नको हे लक्षात ठेवा.

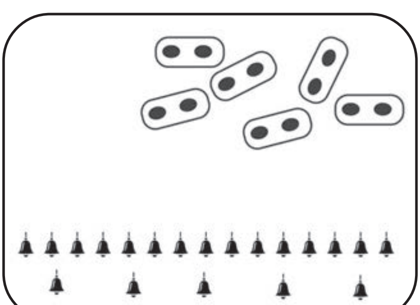
बऱ्याचदा शिक्षक भागाकाराचे चिन्ह किंवा भागाकार करताना लिहीण्याची पद्धत चटकन सांगून टाकतात. मुलं अजूनही समान वाटपाच्या संभ्रमात असतात. ती संकल्पना त्यांच्या मनात रूजण्याआधीच हे नवीन चिन्ह आणि पद्धत त्यांना अजूनच गोंधळात टाकते.

पुन्हा पुन्हा वजाबाकीचा हा उपक्रम किमान दहा दिवस तरी घ्यायला हवा आणि नंतरच त्यांना चिन्ह आणि पद्धत सांगावी.

उपक्रम ४ – भागाकाराच्या चिन्हाची ओळख.

साहित्य – बिया किंवा चौकोनी ठोकळे.

- मुलांना जोड्या करायला सांगा आणि किती जोड्या झाल्या हे मोजायला सांगा.
- त्यांना १५ ठोकळे द्या. एका वेळेला तीन ठोकळे काढायचे. असं किती वेळा करता येईल? मोजू द्या.



मुलांना समान वाटप आणि वारंवार वजाबाकी या दोन्ही प्रकारांनी अनेक वेळा खेळू द्या म्हणजे त्यांना हळूहळू भागाकाराची संकल्पना समजू लागेल. समान वाटपात जे होतं तेच पुन्हा पुन्हा वजाबाकी करताना होतं हे त्यांच्या लक्षात येईल.

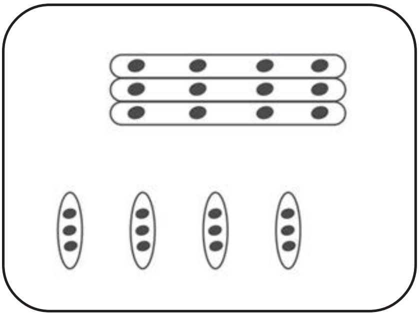
उपक्रम ५ – भागाकार आणि गुणाकार यातला संबंध समजावून देणे.

बऱ्याचदा मुलं भागाकाराचं उत्तर देताना गुणाकार करून उत्तर शोधतात. गुणाकार त्यांना येत असतो आणि समजलेला असतो म्हणून भागाकार न करता सरळ गुणाकाराने उत्तर काढून सांगतात. उदा. १२/४ चे उत्तर तीन चोक बारा असं देतात.

पण सगळ्याच मुलांना हे समजेल, जमेल असं नाही म्हणून शिक्षकांनीच त्यांना गुणाकार-भागाकार संबंध समजावला पाहिजे. त्यासाठी छोटे छोटे प्रश्न विचारायला हवे.

- आधी तुझ्याकडे किती ठोकळे होते? – १२
- तू त्यांच्या किती ओळी केल्यास? – ४
- मग एका ओळीत किती ठोकळे आले? – ३
- मग हे भागाकारात कसं लिहायचं? – १२ ÷ ४ =३

- आता तू तीन ठोकळ्यांची एक रांग कर.
- किती रांगा होतात? ४
- म्हणजे - ३ × ४ = १२



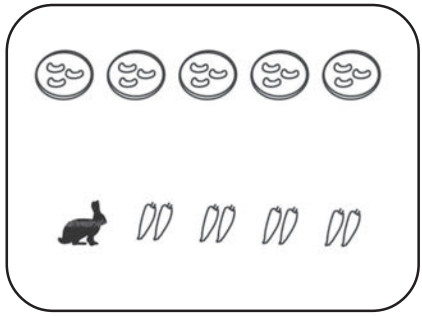
उपक्रम ६ - भागाकारांचा परस्परांशी संबंध

वरील आकृतीत दाखवल्याप्रमाणे ठोकळे मांडा.

- आता ठोकळ्यांची एक रांग म्हणजे तीन रांगा याचा अर्थ १२ ÷ ४ =३ हे मुलांना समजले आहे.
- त्यांना आता तीन तीनचे गट करायला सांगा. किती गट झाले? -४ म्हणजेच १२ ÷ ३ = ४ हे समजावून द्या.

उपक्रम ७ - शाब्दिक उदाहरणातून चित्रातून भागाकार समजावणे.

- परागकडे एकूण १५ गोळ्या आहेत. त्या त्याला पाच जणांना द्यायच्या आहेत, तर प्रत्येकाला किती गोळ्या मिळतील?



- एका बागेत आठ गाजरं आणि दोन ससे आहेत तर एका सशाला किती गाजरं?
- सोनलकडे २४ पेरू आहेत. तिने प्रत्येकाला चार पेरू द्यायचे ठरवले तर ते किती जणांना पुरतील?
- सोळा चिमण्या उडत आल्या. एका घरट्यात चार चिमण्यांनी रहायचं ठरवलं तर किती घरटी लागतील?

अशी अनेक शाब्दिक उदाहरणे चित्ररूपातून दाखवून मुलांकडून करून घ्या म्हणजे त्यांना भागाकाराची संकल्पना स्पष्ट होईल.

लेखिका : **पद्मप्रिया शिराळी**. अजिम प्रेमजी फांऊडेशनच्या कम्युनिटी मॅथ सेंटर उपक्रमात महत्त्वाचा सहभाग. सह्याद्री स्कूल पुणे आणि ऋषीव्हॅली येथे (गणित, कॉम्प्युटर ॲप्लिकेशन, भूगोल, अर्थशास्त्र, पर्यावरण आणि तेलगू भाषा) शिकवत. शिक्षकांसाठी प्रशिक्षण शिबीरे घेतात.
अनुवाद - **यशश्री पुणेकर**.

MATH

Strengthening the fundamentals...

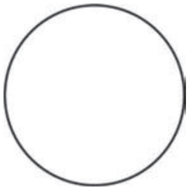
गणिताचा अभ्यास म्हणजे एखाद्या प्रकारची अनेक गणिते सोडवणे असे काही जणांना वाटते. गणित समजण्यासाठी सराव हवा हे खरेच पण गणिताच्या मूळ संकल्पना, त्यातलं तर्कशास्त्र, कार्यकारण हे जाणून घेणं म्हणजेच गणिताचं आकलन. गणितासारख्या रोचक विषयाशी सुयोग्य पद्धतीने मुलांची ओळख करून दिली तर नुसती आकडेमोड न करता मुलं गणितातला आनंद घेऊ शकतील. गणिताबद्दलच्या गैरसमजुती काढून मुलांना गणिताकडे समग्र दृष्टीने पाहता यावं यासाठी सलील शिरीष गाडगीळ यांनी इंग्रजीमध्ये एक स्वाध्यायपुस्तिका तयार केली आहे. पाठ्यपुस्तकापेक्षा हे नक्कीच वेगळे आहे. यात गणिताबद्दलची समज वाढेल, गणित पद्धतशीर सोडवण्याची क्षमता वाढेल, अंकांचा अर्थ आणि आकलन वाढेल अशा पद्धतीचे उपयोजित प्रश्न दिले आहेत.

गणिताच्या विद्यार्थ्यानेही आकलन, तर्कशक्ती आणि प्रयोगातून अमूर्त गणिताचा शोध घ्यावा. त्याची सवय लहानपणापासूनच लागावी म्हणून ७ ते १२ वयोगटातल्या मुलांसाठी ही स्वाध्यायपुस्तिका उपयुक्त ठरेल.

यामध्ये अंकांची संकल्पना आणि मोजणी, अंतर, उंची, वजन, त्यांचा परस्पर संबंध, आर्थिक व्यवहार, घड्याळ, कॅलेंडर, दिनमापन, वय आणि त्यातले अंतर, गुणोत्तर, तार्किक मांडणी, व्यवहारातील गणित, अपूर्णांक आणि भूमिती अशा विविध विषयांवर छोटे छोटे सराव दिले आहेत. सात वर्षांपर्यंत मुलांना अंक, बेरीज-वजाबाकी या क्रिया सहज येतात. गुणाकार-भागाकाराची त्यांची ओळख होत असते. वजन, उंची अंतर याचाही त्यांच्या अभ्यासात समावेश होऊ लागतो. पुढे आर्थिक देवाणघेवाण, रुपये पैसे रूपांतर, फायदातोटा, व्याज या व्यावहारिक संकल्पना त्यांना आता गणितातून समजू लागतात. म्हणूनच या वयोगटातील मुलांसाठी ही स्वाध्यायपुस्तिका उपयोगी आहे. यातली भाषा साधी सोपी तर आहेच पण प्रश्नांची उत्तरं देताना त्यामागचा कार्यकारण भावही दिला आहे. यामुळे मुलांनाही उत्तर सांगताना कार्यकारण भाव शोधण्याची सवय लागते. गणित सोडवणे हा कंटाळवाणा अभ्यास न वाटता एक आव्हान, एक आनंददायी कोडं वाटेल अशी याची रचना आहे. यातील भूमिती विषयाचा अंश देत आहोत.

भूमिती

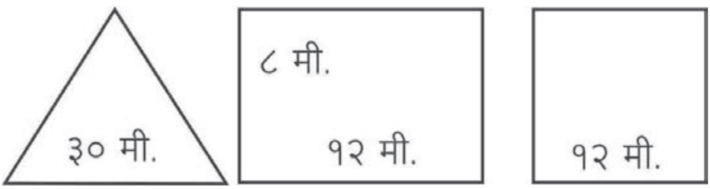
१. श्याम एका वर्तुळातले कोपरे शोधतोय किती कोपरे मिळतील?



अ - १ ब - २

क - ० ड - ४

२. राहूल एका त्रिकोणाकृती रस्त्यावरून चालला आहे. त्याचे वडील चौकोनी रस्त्याच्या मार्गावर फिरत आहेत आणि करण एका चौरसाकृती रस्त्यावरून जात आहे. प्रत्येकाने आपापल्या मार्गावर एक फेरी पूर्ण केली तर प्रत्येकाने किती अंतर कापले?

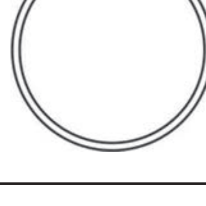


३. एका चौरसाकृती बागेच्या एका बाजूवर १२ झाडे लावली तर पूर्ण बागेच्या सर्व बाजुंवर मिळून किती झाडे होतील?

अ - ४८ ब - ४४

क - ४० ड - ५२

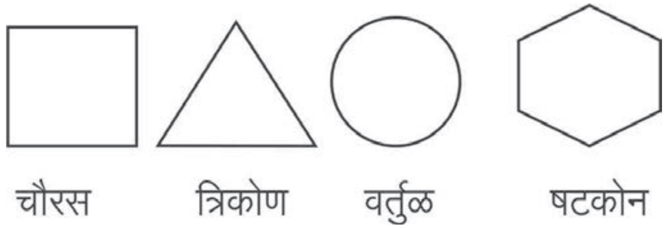
४. एका मैदानाचा परीघ (कडेची लांबी) १५० मीटर आहे. मी जर त्यावरून तीन फेऱ्या मारल्या तर किती अंतर मी चाललो?



अ - ३०० मी. ब - ४५० मी.

क - ६०० मी. ड - १५० मी.

५. राम, राजू आणि रवी एका आकृतीच्या टोकांवर बसले आहेत. आता एकच जागा शिल्लक आहे आणि बाकी कुठेही जागा नाही तर ती बहुभूजाकृती कशी असेल?

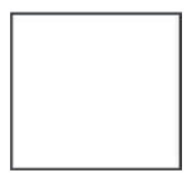


अ - चौरस ब - त्रिकोण क - वर्तुळ ड - षटकोन.

६. प्रविण वरूण पासून १८ मीटरवर उभा आहे. शर्मिलीला बरोबर त्यांच्या मध्यभागी उभं रहायचंय तर तिने प्रवीण पासून किती अंतरावर उभं रहावं?

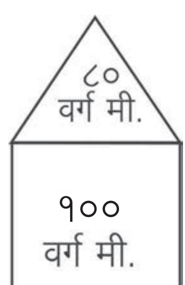
अ - ८ मी. ब - ९ मी. क - ६ मी. ड - १२ मी.

७. एक चौरस काढा. त्याचे शिरोबिंदू जोडून तुम्ही किती त्रिकोण तयार करू शकाल?



अ - ४ ब - ८
क - १२ ड - ६.

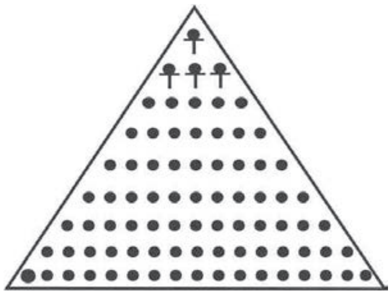
८. खालील आकृतीत एक त्रिकोण चौरसावर काढला आहे. चौरसाचं क्षेत्रफळ १०० चौ.मी. आहे आणि त्रिकोणाचं क्षेत्रफळ ८० चौ.मी. आहे तर आकृतीचं एकूण क्षेत्रफळ किती?



अ-१२० चौ. मी. ब-२० चौ.मी
क-१८० चौ.मी. ड-२०० चौ.मी.

९ ते ११ प्रश्नांसाठी

एका सभागृहात बसण्याची व्यवस्था त्रिकोणाकृती आहे. पहिल्या रांगेत एक जण. दुसऱ्यामध्ये तीनजण असे प्रत्येक रांगेत दोनजण वाढत जातात.



९. आठव्या रांगेत किती जण बसू शकतील?

अ – १५ जण ब – ७ जण

क – ८ जण ड – ९ जण.

१०. पहिल्या तीन रांगात मिळून किती लोक बसतील?

अ – ८ ब – ९

क – १० ड – ११

११. कोणत्या रांगेत २१ लोक बसू शकतील?

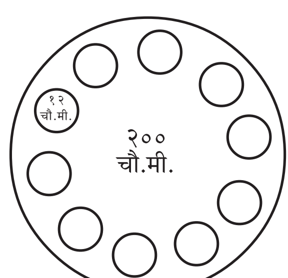
अ – १० वी ब – ११ वी

क – १२ वी ड – १५ वी

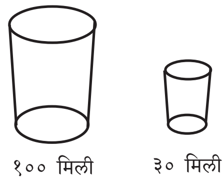
१२. एका वर्तुळाकृती मैदानाचे क्षेत्रफळ २०० चौ.मी. आहे. त्यात प्रत्येकी १२ चौ.मी. क्षेत्रफळ असलेली १० वर्तुळे आखली तर उरलेल्या मैदानाचे क्षेत्रफळ किती?

अ–८० चौ.मी ब–१२० चौ.मी.

क–२०० चौ.मी ड–१२ चौ.मी.



१३. १०० मिली आणि ३० मिलीचे दोन ग्लास वापरून ४० मिली दूध कसे मिळवाल?

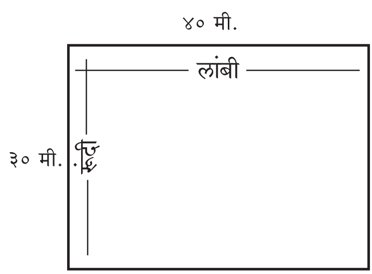


१४. १२ सेमी लांबीची तार वाकवून तिचा चौरस तयार केला तर चौरसाच्या एका बाजूची लांबी किती असेल?

अ- ३ सेमी. ब-४ सेमी.

क-५ सेमी ड-२ सेमी.

१५. रमेश आणि सुरेश एका चौकानाकृती बागेत सकाळी फिरायला गेले. बागेची लांबी ४० मी. आणि रूंदी ३० मी. आहे. रमेशने बागेत ८ पूर्ण फेऱ्या मारल्या. सुरेशने लांबीच्या बाजूने ६ फेऱ्या मारल्या आणि रूंदीच्या बाजूने दहा फेऱ्या मारल्या तर जास्त अंतर कोण चालले?



अ-रमेश ब-सुरेश

क-दोघेही सारखेच अंतर चालले

ड-सांगता येणार नाही.

■■

गणिताच्या अभ्यासाला कोणती गोष्ट मारक ठरते?

लेखक : डी. डी. कारोपाडी • **अनुवाद :** ज्ञानदा गद्रे-फडके

शाळेतल्या मुलांना विचारून बघा, त्यांचा सगळ्यांत नावडता विषय कोणता आहे? दहामधली नऊ मुले 'गणित' हेच उत्तर देतील. तुम्ही अजून खोलात शिरून विचारलेत तर दहामधली सात मुले म्हणतील की गणिताची त्यांना भयंकर भीती वाटते. मुलेच कशाला, मोठ्या माणसांना जरी हा प्रश्न विचारलात तरी तुमच्या लक्षात येईल की उत्तर हेच मिळेल. नमुन्यादाखल मी अझीम प्रेमजी फांउडेशनमधल्या आणि त्याच्या बाहेरच्या माझ्या काही मित्रांशी बोललो आणि त्यांना विचारले, ''गणित म्हटले की तुमच्या डोक्यात कोणते शब्द येतात?'' अगदी सूक्ष्मदर्शकातून शोधण्याइतके लोक सोडले तर सगळी वर्णने अगदी नकारात्मक होती - अपयशाची भीती, खूप कठीण, शाळेत बसलेला मार, अनाकलनीय, प्रत्यक्ष आयुष्याशी नसलेला संबंध, सूत्रे, पाठांतर, मला गणित येत नाही म्हणून मी मूर्ख आहे, ते खूपच हुशार लोकांसाठी असते, कोरडे, कंटाळवाणे आणि असेच बरेच काही. एका प्रतिक्रियेने सगळा सारांश सांगितला तो असा - ''अरे देवा! परीक्षेनंतर मुलांनी टोकाचे पाऊल उचलण्याच्या बऱ्याच घटनांचे मूळ कारण गणितापर्यंत शोधता येऊ शकते. हा प्रश्न केवळ विषयाशी निगडीत नाही तर मुलांना एकूण शिक्षणाच्या प्रक्रियेबद्दल अनास्था वाटण्यात ह्याची परिणती होऊ शकते.''

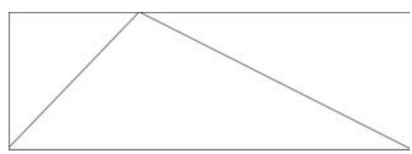
ह्याची कारणे शोधायला फार लांब जायला नको; ज्या प्रकारे आपले शिक्षक शाळेत हा विषय हाताळतात, त्याचा ह्यात मोठा वाटा आहे. प्राथमिक शिक्षकांच्या केलेल्या सर्वेक्षणात असे आढळले की त्यांच्यापैकी बरेच जण 'कला' शाखेतून आलेले असतात आणि त्यांचा सुद्धा गणित हा कमकुवत विषय असतो. जेव्हा त्यांनाच ह्या विषयाची भीती वाटत असते तेव्हा

नैसर्गिकरीत्या हीच भीती शिक्षक मुलांपर्यंत पोहोचवतात. दुर्दैवाने, गणित शिकवण्याचा फोकस हा व्याख्या, पाठांतर, आठवणे, आकडेमोड ह्यावर आहे. गणितांना योग्य 'संदर्भ' पुरवणे आणि प्रत्यक्ष आयुष्यात गणित 'उपयोगी' बनवणे ह्यासाठी सुद्धा बऱ्याच प्रयत्नांची गरज आहे.

कुठेतरी, लोकांच्या मनात, गणित हा विषय 'गणित हे विज्ञानाशी जवळचा संबंध असलेले' आणि 'विज्ञानासारखेच' म्हणून गणिताकडे पाहिले जाते. जरी गणित विज्ञानात वापरले जात असले तरी हे दोन्ही अगदी वेगवेगळे विषय आहेत. विज्ञानाचा पाया प्रयोगांमध्ये आहे तर गणित काल्पनिक आणि अमूर्त आहे. गणिते करायला कोणत्याही विशेष उपकरणाची किंवा प्रयोगशाळेची गरज लागत नाही. जर गणित नीटपणे हाताळले तर अतिशय आनंददायक ठरू शकते. 'एका गणितीचे दु:ख' ह्या लेखात पॉल लॉकहार्ट म्हणतात, ''गणित ही एक कला आहे. फक्त आपली संस्कृती गणिताला कला मानत नाही. वस्तुस्थिती अशी आहे की गणितासारखे स्वप्नवत आणि काव्यात्म, मूलगामी, विध्वंसक आणि उन्मादक असे काहीही नाही. गणित विश्वउत्पत्ती शास्त्र आणि भौतिकशास्त्राइतकेच मनोरंजक आहे.

(खगोलशास्त्रज्ञांना कृष्ण विवरे प्रत्यक्षात सापडण्याच्या कितीतरी आधी गणितज्ञांनी कृष्ण विवरांची संकल्पना मांडली होती.) आपल्याला, एक संस्कृती म्हणून, गणित काय आहे हे माहिती नाही. काहीतरी अगदी रुक्ष आणि अतिशय तांत्रिक– कुणालाही समजण्याची शक्यता नसलेले– स्वत:ला समाधान देणारे एक भाकीत, म्हणजे गणित, अशी आपली समजूत करून देण्यात आलेली आहे.''

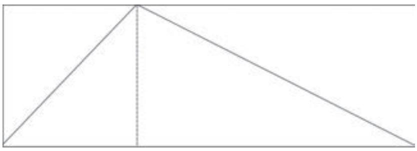
लॉकहार्टच्या म्हणण्यानुसार, गणिताचा दुसरा कोणताही अंतस्थ व्यावहारिक हेतू नाही. गणित म्हणजे खेळणे, आश्चर्यचकीत होणे आणि आपल्या कल्पनाशक्तीने स्वत:चे मनोरंजन करणे. त्याने एका आकृतीसह एक सुंदर उदाहरण दिले आहे.



आकृती १

स्रोत : अ मॅथेमॅटीशियन्स लॅमेंट हे पॉल लॉकहार्ट लिखित पुस्तक

पुढे तो विचारतो की ''ह्या त्रिकोणाने ह्या चौकोनाचा दोन तृतीयांश भाग व्यापला आहे का?'' वस्तुस्थिती कळण्याचा एकच मार्ग म्हणजे कल्पना करणे आहे. ह्या उदाहरणात, आकृती क्रमांक २ मध्ये दिल्याप्रमाणे हा चौकोन दोन भागात कापणे हा एक मार्ग आहे.



आकृती २

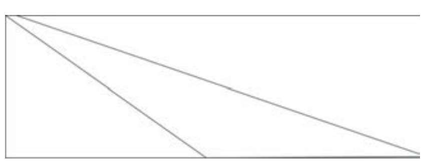
आता आपल्याला दिसेल की दोन भाग आयताकृती आहेत आणि ह्या प्रत्येक आयताचे त्रिकोणाच्या बाजूमुळे दोन भाग झालेले आहेत. त्यामुळे ह्या त्रिकोणाच्या आत जितकी जागा आहे, तितकीच बाहेर आहे. म्हणजेच त्रिकोणाने बाहेरच्या आयतात बरोबर निम्मी जागा व्यापली आहे. आता एका रेघेने आयताचे दोन भाग करण्याची कल्पना आली कुठून? ही कल्पना म्हणजे प्रोत्साहन, अनुभव, ट्रायल आणि एरर, किंवा फक्त नशीब. हीच गणितातील कला. दोन आकारांमधले नाते, ही रेघ काढेपर्यंत गूढच होते. आधी मला दिसले नव्हते, नंतर अचानक दिसले. काहीतरी करून, काही नसलेल्यातून मी साधे सौंदर्य तयार करू शकलो. हीच कला नाही का?''

त्रिकोणाचे क्षेत्रफळ, त्रिकोणाचा पाया आणि उंची ह्यांच्या गुणाकाराच्या निम्मे असते. – हे पाठ करून घेण्यापेक्षा आणि पुन्हा पुन्हा वापरायला लागण्यापेक्षा मुलांना वरील उदाहरण सोडवण्यात जास्ती मजा येणार नाही का? काही संदर्भ असताना सूत्रे किंवा काही मनोरंजक गोष्टी लक्षात ठेवण्याला लॉकहार्ट यांचा आक्षेप नाही. ते म्हणतात, ''अधिक पर्याय निर्माण करण्याची प्रक्रिया सुरू होणे आणि त्यामुळे इतर सुंदर कल्पनांना प्रोत्साहन मिळून आणि इतर प्रश्नांचे कल्पक उत्तर मिळण्यासाठी ब्रेक थ्रू मिळणे हेच जास्ती महत्त्वाचे आहे.'' ते पुढे म्हणतात, ''गणित ही समजावून सांगण्याची कला आहे. जर तुम्ही मुलांना ह्या प्रक्रियेत सामील होण्याची संधी नाकारलीत – त्यांचे स्वत:चे प्रश्न मांडण्याची – त्यांचे स्वत:चे तर्क, शोध मांडण्याची, चूक असण्याची, सृजनशील नैराश्याची, स्फूर्ती घेण्याची, त्यांची स्वत:ची कारणमीमांसा आणि पुरावे मांडायची – तर आपण त्यांना गणितच नाकारल्यासारखे आहे. विद्यार्थी म्हणजे परग्रहावरची माणसे नव्हेत. विद्यार्थी सौंदर्याला आणि पॅटर्नना प्रतिसाद देतात आणि सगळ्या लोकांप्रमाणेच ते सुद्धा नैसर्गिकरीत्या जिज्ञासू असतात. फक्त त्यांच्याशी बोला! आणि जास्त महत्त्वाचे – त्यांचे ऐका!''

तर आपले शिक्षक मुलांना काही गोष्टी किंवा तर्क शोधायला वेळ देतात का किंवा त्यांना खिळवून ठेवणारे प्रश्न घालतात का? शिक्षक मुलांसाठी खेळीमेळीच्या वातावरणात चर्चा करण्याचे, चौकशी करण्याचे वातावरण पुरवतात का आणि मुलांच्या जिज्ञासेचे समाधान करण्यासाठी अवकाश पुरवतात का? लॉकहार्ट म्हणतात,

''शिक्षकांना मुलांशी असे नाते तरी हवे असते की नाही, ह्याचीच मला शंका आहे.'' कोणत्यातरी पुस्तकातील साहित्य वापरून 'व्याख्यान द्या, परीक्षा घ्या आणि पुनरावृत्ती करा' ही पद्धत वापरणे सोपे आहे – हा मार्ग सर्वांत कमी कष्टांचा आहे. जर शिक्षकाच्या मते अपूर्णांकांची बेरीज म्हणजे काही नियमांचा संच असेल आणि कोणत्याही सृजनात्मक प्रक्रियेचा परिणाम नसेल तर बिचाऱ्या विद्यार्थ्यांनाही कधीच तसे वाटणार नाही. शिकवणे म्हणजे मुलांशी एक प्रामाणिक बौद्धिक नाते निर्माण करणे. त्यासाठी कोणत्याही पद्धतीची गरज नाही, कोणत्याही साधनांची गरज नाही आणि प्रशिक्षणाचीही नाही.''

आता, मगाचेच चौकोनातल्या त्रिकोणाचे उदाहरण घेऊया, जर त्रिकोण तिरका असेल तर काय होईल? आपण कशी रेघ काढू शकतो? काय करता येऊ शकेल?

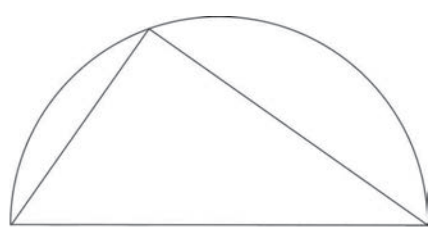


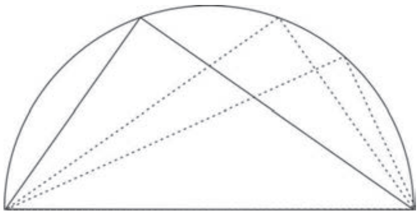
आकृती ३

विविध शक्यतांचा विचार करा आणि शोधून काढा. गणित म्हणजे हेच आहे.

आपल्या शाळांमध्ये भूमिती हा विषय अतिशय कंटाळवाणा असतो आणि न चुकता सिध्दांत – सिद्धता – प्रमेय – उत्तर आणि मग दुसरे प्रमेय ह्याच क्रमाने जातो. लॉकहार्ट यांनी माध्यमिक शाळेतल्या भूमितीबद्दल कडक टीकात्मक उद्‌गार काढले आहेत, ''निरर्थक व्याख्या, शब्दयोगी अव्यये, चिन्हे ह्यांच्या माऱ्याने विद्यार्थी – बळी हा आधी थक्क होतो, नंतर त्याला लकवा भरतो आणि नंतर हळूहळू आणि कष्टपूर्वक कोणत्याही नैसर्गिक जिज्ञासेपासून किंवा आकारांबद्दलच्या आणि त्यांच्या आकृतीबंधांच्या अंतर्दृष्टीपासून औपचारिक भौमितिक सिद्धतेच्या शब्दांचे अवडंबर असलेल्या रचनेमुळे आणि कृत्रिम भाषेमुळे दूर लोटला जातो. पहिली ते बारावीच्या पूर्ण अभ्यासक्रमात भूमितीचा तास हा मानसिक आणि भावनिक दृष्ट्या सर्वांत जास्त विध्वंसक असा असतो.''

त्यांनी अर्धवर्तुळाच्या आतल्या त्रिकोणाचे एक सुंदर उदाहरण दिले आहे. त्रिकोणाचे टोक अर्धवर्तुळावर कुठेही ठेवले तरीही त्यातून नेहेमी काटकोन त्रिकोणच तयार होतो.





आकृती ४

पहिल्या नजरेत असे होणार नाही असे वाटते. नंतर असा प्रश्न विचारायचा की हे खरे कसे काय असू शकेल? मुलांना हे शोधण्याची आणि हे असे का असू शकते ते शोधण्याचा प्रयत्न करण्याची संधी इथेच मिळते किंवा हे का खरे असू शकत नाही, हे शोधण्याचा प्रयत्न करण्याची संधी सुद्धा मिळते. पण त्याऐवजी आपण त्यांना ह्या प्रमेयाची प्रमाणित 'सिद्धता' देतो आणि त्यांना ती लक्षात ठेवावी लागते.

''एक नकाशा असा रंगवायचा आहे की शेजारच्या दोन राज्यांचा रंग सारखा नसेल, तर कमीत कमी किती रंग लागतील?'' असा प्रश्न मुलांना भूमितीमध्ये विचारला तर काय होईल? तुम्ही असे काही विशेष आकार शोधू शकता का की ज्यामध्ये ह्यापेक्षा जास्ती रंग लागतील? कमी रंग वापरून कोणत्या विशेष आकारांना रंगवता येईल?

अजून एक उदाहरण म्हणून, भौमितिक आकारांची अनेक जिग-सॉ कोडी बनवता येतील आणि फक्त खेळून, तुकडे इकडे तिकडे हलवून, ह्या प्रक्रियेत विविध आकार शोधून, मुलांसाठी हा आनंदाचा आणि शिकण्याचा मोठा स्रोत ठरेल.

मुले (आणि खरेतर प्रौढ लोकसुद्धा) नवीन शोध लावण्यास उत्सुक असतात. जर हा शोध अपघाताने लागला तर त्याची जास्तच मजा येते. आपण आपल्या मुलांना पाढे पाठ करायला लावतो. जर मुलांना संख्यांमधील पॅटर्न शोधता आले तर किती मजा येईल? आणि हे जर स्वत:लाच सापडले तर मुलांना किती मजा येईल?

९ ह्या आकड्याचीच गोष्ट घ्या.

९ x १ = ९	० + ९ = ९
९ x २ = १८	१ + ८ = ९
९ x ३ = २७	२ + ७ = ९
९ x ४ = ३६	३ + ६ = ९

... आणि अशाच प्रकारे पुढे करत राहू शकतो.

आता मुलांना ३, ५, ११, १५,... अशा इतर आकड्यांबद्दलच्या मनोरंजक गोष्टी शोधायला सांगा.

तुम्ही हल्ली बसमध्ये किंवा ट्रेनमध्ये बरेच लोक पेन्सिल चावत चावत वर्तमानपत्रावर लिहिण्यात, खोडण्यात, दुरुस्त करण्यात आणि पुन्हा लिहिण्यात गुंग असलेले पाहिले असेल. ते नवीन क्रेझ असलेले सुडोकू सोडवत असतात. हे सोडवण्याची गंमत

सोडून कोणताही व्यावहारिक उपयोग नाही. ह्या सुडोकूचा सोपा अवतार असलेले जादूचे चौरस आपण मुलांना खेळायला देऊ शकतो.३ x ३ च्या चौरसात १-९ आकडे अशा रीतीने भरायचे की प्रत्येक उभ्या, आडव्या आणि तिरक्या ओळीतील आकड्यांची बेरीज १५ येईल. हा चौरस सर्वांत सोपा असतो. असे मोठ्या आकाराचे वेगवेगळे जादूचे चौरस बनवता येतात.

जादूचे चौरस

जादूच्या चौरसांनी गणितज्ञांना प्राचीन काळापासून भुरळ घातली आहे. ही संकल्पना चीनमध्ये (अजून कुठे असणार?) इसवीसन पूर्व २८०० मध्ये उदयाला आलेली आहे, असे समजले जाते. भारतामध्ये ह्या कल्पनेचे संदर्भ अकराव्या किंवा बाराव्या शतकात सापडतात आणि खजुराहो ह्या प्राचीन शहरात त्याची काही उदाहरणे सापडली आहेत.

जादूचा चौरस ही क्रमवार संख्यांची चौकटीत केलेली अशी मांडणी असते की एक संख्या फक्त एकदाच येते आणि प्रत्येक उभी रेषा, आडवी रेषा आणि कर्णाच्या रेषेतील संख्यांची बेरीज सारखीच असते. जादूच्या चौरसातील आकडे १पासून सुरु होतात. ह्या चौरसांना साधे जादूचे चौरस असे म्हणतात.

सगळ्यात छोटा आणि सगळ्यात साधा जादूचा चौरस म्हणजे १ x १ ची चौकट.

त्या नंतरचा मोठा जादूचा चौरस म्हणजे ३ x ३ ची १ ते ९ आकडे असलेली चौकट. ह्या प्रकारच्या चौरसात प्रत्येक उभी रेषा, आडवी रेषा आणि कर्णाच्या रेषेतील संख्यांची बेरीज १५ येते. (२ x २ चा जादूचा चौरस असणे शक्य नाही. का ते तुम्ही सांगू शकाल का?)

४	९	२
३	५	७
८	१	६

एका जादूच्या चौरसाच्या उभ्या आणि आडव्या ओळींची अदलाबदल करून अनेक नवीन जादूचे चौरस बनवता येतात.

जसजसे आपण मोठे जादूचे चौरस बनवायला लागतो, तशा मनोरंजक शक्यता आणि विविधता वाढते. ४ x ४ च्या चौरसातील संख्यांची बेरीज ३४ असते आणि चार कोपऱ्यातल्या चार संख्यांची बेरीज सुद्धा तेवढीच येईल अशा पद्धतीने संख्यांची मांडणी ह्यात करता येते. मोठ्या जादूच्या चौरसात 'गुणाकाराचा जादूचा चौरस', ज्यात उभ्या - आडव्या रेषा आणि कर्णातील संख्यांचा गुणाकार समान असतो, अशा मनोरंजक चौरसांचा समावेश होतो. अजून

एका विशेष चौरसात उभ्या -आडव्या रेषा आणि कर्णातील संख्यांचा गुणाकार ही समान असतो आणि बेरीजही समान असते.

अजून एक प्रकार म्हणजे अँटी जादूचा चौरस. ह्या चौरसात १ पासूनच्या क्रमवार संख्या असतात पण उभ्या -आडव्या रेषा आणि कर्णातील संख्यांची बेरीज वेगेवेगळी असते आणि ही बेरीज क्रमवार संख्या असतात. खालील दिलेल्या ४ x ४ च्या चौरसाचे निरीक्षण करा.

१५	२	१२	४
१	१४	१०	५
८	९	३	१६
११	१३	६	७

ह्या चौरसातील बेरजा म्हणजे क्रमवार संख्या आहेत का तपासून बघा.

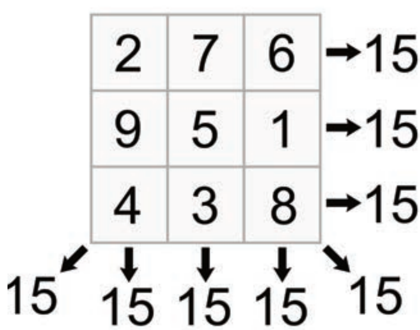
वरच्या व्याख्येप्रमाणे अँटी जादूचा चौरस करायचा असेल तर तो ४ x ४ पेक्षा लहान असू शकत नाही. काही जण खाली दिलेल्या चौरसाला सुद्धा अँटी जादूचा चौरस म्हणतात, पण आपल्या व्याख्येत तो बसत नाही. कारण सगळ्या बेरजा क्रमवार संख्या असण्याची अट तो पूर्ण करत नाही.

७	६	५
८	९	४
१	२	३

तुमच्या लक्षात येईल की डाव्या कोपऱ्यापासून घड्याळाच्या विरुद्ध दिशेने संख्या लिहायला सुरुवात करून हा चौरस तयार केला आहे.

जादूच्या चौरसाचा अजून एक प्रकार म्हणजे 'लॅटीन चौरस'. ह्यात त्याच संख्या पुन्हा पुन्हा येतात पण एकाच आडव्या किंवा उभ्या रेषेत येत नाहीत. सगळ्यात साधा चौरस म्हणजे अर्थातच २ x २ चा चौरस.

१	२
२	१



तुम्ही ह्या पुढचा ३ x ३ चा ‘लॅटीन चौरस’ तयार करू शकता का? ते काही फार अवघड नाही. तुमच्या लक्षात आले असेल की सुडोकू हा ९ x ९ चा ‘लॅटीन चौरस’ असतो.

घन, वर्तुळे, तारे असे अनेक मजेशीर आकार आहेत.

अल्फा जादूचा चौरस हा माझ्या आवडत्या जादूच्या चौरसांच्या प्रकारांपैकी एक आहे.

खालील चौरस पाहा :

५	२२	१८
२८	१५	२
१२	८	२५

४	९	८
११	७	३
६	५	१०

खालच्या चौरसातील आकडे वरच्या चौरसावरून मिळाले आहेत. ह्या आकड्यात काय संबंध आहे तुम्ही सांगू शकाल का? (हिंट : डावीकडच्या चौकोनातील अंक इंग्रजीमध्ये लिहा.)

जादूच्या चौरसाची गंमत चौरसातील पॅटर्न शोधण्यात आणि दिलेल्या उत्तरातून अजून पर्याय शोधणे ह्यात आहे. खाली दिलेले मनोरंजक उदाहरण पाहा. ह्या चौरसात १६ चौकटीत १ ते १६ अंक लिहिलेले आहेत.

१	८	१२	१३
१४	११	७	२
१५	१०	६	३
४	५	९	१६

ह्यात तुम्ही बघू शकता की, प्रत्येक उभी ओळ, आडवी ओळ आणि मुख्य कर्णातील संख्यांची बेरीज ३४ येते. तुम्हाला अजून काही पॅटर्न दिसतो का?

जर तुम्ही बारकाईने निरीक्षण केले तर, तुमच्या लक्षात येईल की वरच्या उजव्या कोपऱ्यातल्या चार चौकटीमधील संख्यांची बेरीज (१३, १२, ७ आणि २) सुद्धा ३४ येते आणि प्रत्येक कोपऱ्यातील चार चौकटीतील संख्यांची बेरीज सुद्धा ३४ येते. ह्या चौरसात अनेक चौकटीतील संख्यांची बेरीज ३४ येते. तुम्ही शोधू शकता का? ह्या प्रश्नाची अजून काय उत्तरे आहेत? एकूण चौकटींची संख्या सम असेल तर त्या प्रकारच्या प्रत्येक चौरसात कोपऱ्यातल्या

संख्यांचा हाच गुणधर्म असतो का?

गणित शिकवण्याचा हा जास्ती मनोरंजक आणि गंमतीचा मार्ग नाही का? गणिताचे शिक्षण ही अधिक आनंददायक प्रक्रिया बनवण्याचे इतर अनेक मार्ग आहेत. गणितातील प्रत्येक गोष्ट ह्याच प्रकारे शिकवता येईल किंवा शिकवली पाहिजे हे सांगण्याचा माझा प्रयत्न नाही. हा विषय म्हणजे चौकशी, शोध आणि एक्साईटमेंटचा प्रवास असावा, असा प्रयत्न असला पाहिजे. हा सगळा प्रवास पॅटर्न त्यांच्याकडे बघण्याचे विविध मार्ग शोधण्याचा, चुका करण्याचा, स्वत:ला पुढचे अधिक प्रश्न विचारण्याचा, अधिक उत्तरे शोधण्याचा आणि तुमच्या मनाला आधी न पाहिलेल्या प्रदेशातून जायला लावण्याचा आहे. निकालापेक्षा ही प्रक्रिया जास्त महत्त्वाची झाली पाहिजे. गणिताची 'भीती' काढून टाकणे हा उद्देश असला पाहिजे. त्यामुळे मुलांना केवळ विषयाची गोडी लागेल असे नव्हे तर शिकण्याच्या प्रक्रियेची गोडी लागेल कारण त्यातली भीती निघून गेलेली असेल. अभ्यासक्रमाची प्रक्रिया आपल्या शिक्षकांपासून सुरू व्हायला हवी, गणितातील सौंदर्य शोधण्याच्या कलेचा मार्ग उपलब्ध करून देणे, हे शिक्षकांना आता पुन्हा शिकावे लागेल.

हा लेख पॉल लॉकहार्ट ह्यांच्या 'अ मॅथेमॅटीशियन्स लॅमेंट हे पॉल लॉकहार्ट' ह्या लेखापासून प्रेरीत आहे आणि बराचसा ह्याच लेखावर आधारीत आहे. मूळ लेख http://www.maa.org/devlin/LockhartsLament.pdf येथे वाचता येईल. ज्यांना गणित आवडत नाही, त्या सर्वांनी हा लेख मुद्दाम वाचलाच पाहिजे असा आहे आणि ज्यांना गणिताबद्दल प्रेम वाटते, त्यांनी तर नक्कीच वाचला पाहिजे असा आहे.

संदर्भ:

1. Weisstein, Eric W. "Magic Square" From MathWorld – A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html
2. Weisstein, Eric W. "Antimagic Square" From MathWorld – A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/AntimagicSquare.html
3. Weisstein, Eric W. "Alphamagic Square" From MathWorld – A Wolfram Web Resource http://mathworld.wolfram.com/AlphamagicSquare.html मधून साभार

लेखक : **डी. डी. कारोपाडी,** बेंगलोरच्या अझीम प्रेमजी फाउंडेशनमध्ये संशोधन आणि डॉक्युमेंटेशन विभागाचे प्रमुख आहेत. ह्याआधी देशातल्या एका मोठ्या मार्केट रीसर्च ऑर्गनायझेशनमध्ये ते मार्केट रीसर्चचे संचालक होते. उद्योगातील २५ वर्षांच्या अनुभवानंतर त्यांनी ८ वर्षे डेव्हलपमेंट क्षेत्रात काम केले.

karopady@azimpremjifoundation.org

अनुवाद : **ज्ञानदा गद्रे-फडके,** सॉफ्टवेअर इंजिनीअर आहेत. मुक्त भाषांतरकार म्हणून काम करतात.

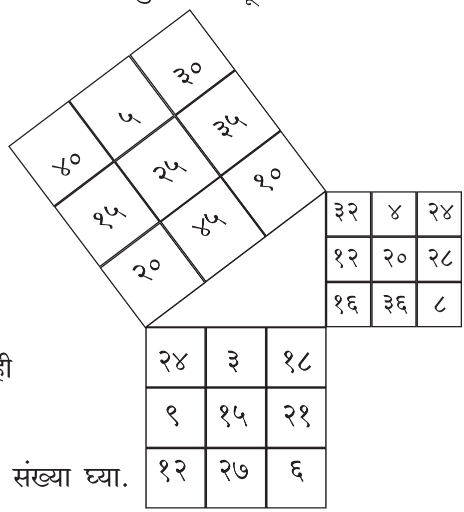
पायथागोरस आणि जादूचा चौरस

पायथागोरसचे प्रमेय बहुतेक विद्यार्थ्यांना माहिति असते. काटकोन त्रिकोणात

कर्ण^{२} = बाजू^{२} + बाजू^{२}

a-b-c या पूर्णांकातील बाजू असतात. तेव्हा त्या त्रिकोणाला पायथागोरियन त्रिकोण म्हणतात. ३-४-५, ५-१२-१३, ७-२४-२५ अशी अनंत त्रिकुटे आहेत. व त्रिकुटे करण्याच्या पद्धतीही पुष्कळ आहेत.

शेजारी ३-४-५ हे पायथागोरियन त्रिकुट दाखवले आहे. व त्याच्या बाजूवर जादूचे चौरस बनवले आहेत. आता त्या चौरसांचे काही गुणधर्म पाहू.



१. चौरसातील डाव्या वरच्या कोपऱ्यातील संख्या घ्या. २४-३२-४० या त्या संख्या.

४०^{२} = २४^{२} + ३२^{२}

३०, १८, २४ ह्या संख्या घेऊन पडताळा घ्या.

२. कर्णावरील चौरसातील कोणत्याही दोन संख्या घ्या. त्याचा वर्ग करा. आता बाजूवरील चौरसाच्या अनुक्रमे संख्या घ्या. आणि वरील प्रमाणे कृती करा.

कर्णावरील चौरस = ५ + ३० = ३५

बाजूवरील चौरस = ३ + १८ = २१ ३५^{२} = २१^{२} + २८^{२}

बाजूवरील चौरस = ४ + २४ = २८

३. कर्णावरील चौरसावरील कोणतीही ओळ घ्या. ४० + ५ + ३० = ७५. बाजूवरील संगत ओळ घ्या. २४ + ३ + १८ = ४५, दुसऱ्या बाजूवरील संगत ओळ घ्या. ३२ + ४ + २४ = ६०. ७५^{२} = ४५^{२} + ६०^{२}.

गणितात गंमत असते आणि त्या गंमतीतही गणित असते हे ध्यानात घ्या.

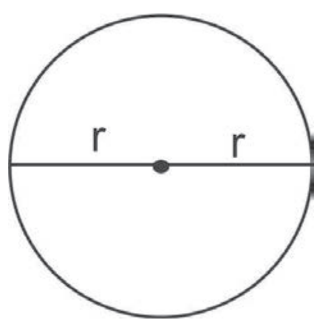
पाय (π) आणि पायची अद्भूत कहाणी

वर्तुळ ही आकृती आपल्या सर्वांच्या परिचयाची आहे. वर्तुळाचा परीघ आणि वर्तुळाचा व्यास यांचे गुणोत्तर ज्या चिन्हाने दाखवितात ते चिन्ह म्हणजे π होय. याचा उच्चार पाय असा करतात. विशेष म्हणजे हे π चिन्ह ज्या संख्येकरता वापरतात, त्या संख्येतील दशांश चिन्हानंतरचे अंक कधीही संपत नाहीत. शालेय अभ्यासक्रमात पाय ही संख्या सामान्यतः सातव्या इयत्तेत आपल्या समोर येते. शालेय अभ्यासक्रमात याची अंदाजे किंमत 22/7 अथवा 3.1416 अशी घेतात. परीक्षेत विचारलेल्या प्रश्नांत पायचा वापर असल्यास व त्याची स्वतंत्र किंमत दिली नसल्यास. ती 22/7 घ्यावी असा संकेत आहे.

ऑयलर (१७०७–१७८३)

ग्रीक भाषेतील मुळाक्षरांतील 16 वे मुळाक्षर पाय (p) आहे. प्राचीन ग्रीक अक्षरसाहित्यात 80 ही संख्या (p) अक्षराने दाखवीत असत. प्रख्यात गणिती ऑयलर (1707-1783) यांनी २५० वर्षांपूर्वी वर्तुळाचा परीघ (p) आणि वर्तुळाचा व्यास (d) यांच्या गुणोत्तरासाठी π हे चिन्ह वापरण्यास सुरुवात केली, ती आजतागयत सुरू आहे. वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठीच्या सूत्रात, वर्तुळाच्या त्रिज्येच्या वर्गास π ने गुणण्याची क्रिया असते.

वर्तुळाचा परीघ २πr सूत्राने काढतात. r म्हणजे वर्तुळाची त्रिज्या (radius), तर वर्तुळाचे क्षेत्रफळ काढण्यासाठी πr^2



असे सूत्र वापरतात. २$\pi r^2 h$ या सूत्राने कशाचे घनफळ काढतात ते तुम्ही शोधून काढा. गोलाच्या घनफळातही π चा समावेश आहे. गोलाच्या घनफळाचे सूत्र तुम्हाला ठाऊक आहे?

वस्तुत π ही अपरिमेय संख्या (Irrational Number) आहे. ती व्यवहारी अपूर्णांकात दाखविता येत नाही. खरे पाहता, या संख्येस बीजातीत संख्या (Transendental Number) असे म्हणतात.

थोडा इतिहास

प्राचीन काळापासून आजपर्यंत शेकडो गणितींनी π ची किंमत काढण्याची निरनिराळी सूत्रे तयार केली आहेत. π ची अचूक किंमत सांगता येणार नाही हे गणितज्ञांनी सिद्ध करूनही π ची किंमत अचूक शोधल्याचे अनेकजण सांगतात. रामानुजन, लाप्लास, आर्किमिडिज, न्यूटन,

$$\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$$

आर्किमिडिज

देकार्त, फिबोनासी, तामुरा या व अशा अनेकांना π ने भुरळ घातली आहे. अलिकडील संगणकयुगात संगणकाचा वापर करून π ची किंमत अधिकाधिक स्थळांपर्यंत शोधण्याचे संगणकीय प्रोग्राम विकसित झालेले आहेत. दोन वर्षांपूर्वी π ची किंमत संगणकाच्या साह्याने १२.१ ट्रिलियन स्थळांपर्यंत काढण्यात आली आहे. १ ट्रिलियन म्हणजे १ वर बारा शून्ये दिल्यावर होणारी संख्या (१०००००००००००००). संगणकालाही या कामाला ९५ दिवस लागले! π च्या किंमतीत कितीवेळा कोणता अंक येतो, कोणत्या क्रमाने येतो किंवा नाही याबद्दलही अनेकजण संशोधन करतात.

भारतीय गणिती आर्यभट्ट यांनी π ची किंमत (६२८३२/२००००) म्हणजे (३.१४१६) सांगितली आहे. ती किंमत चार दशांश स्थळांपर्यंत योग्य आहे. ब्रह्मगुप्त या भारतीय गणितीने १० चे वर्गमूळ (म्हणजे $\sqrt{१०}$) ही पायची किंमत सांगितली आहे. विशेष म्हणजे दशांशाच्या दुसऱ्याच स्थळाला ती चुकते! आर्किमिडीज या गणिततज्ञाने मात्र दशांशाच्या तीस स्थळांपर्यंतची किंमत अचूक काढलेली आहे ! π हे चिन्ह ऑयलर (अथवा यूलर) या गणिततज्ञाने प्रसिद्धीला आणले.

इथं पुढं π ची किंमत दाखविली आहे. दशांशचिन्हाच्या पुढे 10 अंकांचा एक गट असे 15 गट म्हणजे एकूण 150

π = 3.			
1415926535	8979323846	2643383279	5028841971
6939937510	5820974944	**5923078164**	0628620899
8628034825	3421170679	8214808651	3282306647
0938446095	5058223172	5359408128..	

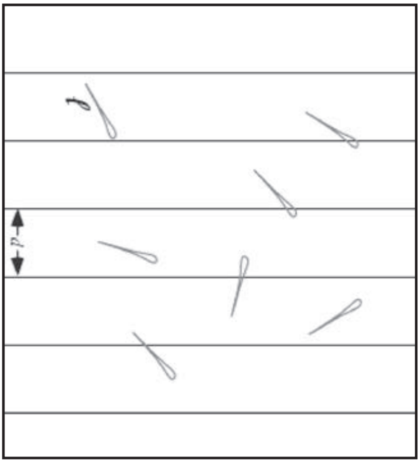
अंक दाखविले आहेत. शेवटची टिंबे म्हणजे संख्या वाढतच जाणार हे दाखविण्यासाठी दिलेली आहेत. विशेष म्हणजे 7 व्या गटातील 10 अंक म्हणजे 0 ते 9 पर्यंतचे 10 अंक आहेत! त्यांना चौकट करून दाखविली आहे.

बफनचा प्रयोग
(Buffon's Experiment)

बफन नावाच्या फ्रेंच शास्त्रज्ञाने एक मजेशीर प्रयोग केला. वहीच्या एका पानावर त्याने सुई टाकली आणि ही सुई वहीवरील समांतर रेषांना किती वेळा छेदते व ती सुई एकूण किती वेळा टाकली याची नोंद ठेवली. सुईची लांबी, वहीवरील दोन रेषांमधील अंतरापेक्षा कमी होती. विशेष म्हणजे बफन यांनी असे सिद्ध केले की वहीवरील रेषांना सुई छेदण्याची शक्यता (संभाव्यता) ही π या संख्येशी निगडीत असते.

π = (2 x किती वेळा सुई टाकली ती संख्या) (किती वेळा छेदली ती संख्या). अर्थात सुई वहीवर टाकण्याची ही क्रिया खूपदा करावी लागते. इटालियन गणिती लॅझॅरिनी यांनी हा प्रयोग 3408 वेळा केला आणि π ची किंमत 3.1415929 अशी येते हे दाखविले!

प्रख्यात भौतिक शास्त्रज्ञ अल्बर्ट आईनस्टाईन यांचा जन्म १४ मार्च १८७९ ला झाला. मार्च महिना हा तिसऱ्या (3) क्रमांकाचा महिना असल्याने 3.14 ही π ची अंदाजे असणारी किंमत लक्षात घेऊन 14 मार्चला π दिवस साजरा करतात. 3.141879 या संख्येतील 1879 हे आईनस्टाईन यांचे जन्मवर्ष आहे. इंटरनेटवर π दिवसासाठी करावयाचा आनंदोत्सवासाठी खूपच माहिती उपलब्ध



आहे. http://mathswithmrherte.com/pi_day.htm. ही साईट जरूर पहावी!

π ची किंमत लक्षात ठेवण्यासाठी काही मजेशीर बाबी

π ची दशांश काळातील किंमत स्मरणात ठेवणे हा जगभर एक करमणुकीचा विषय आहे. काहीजण पहिले १० अंक, काहीजण पहिले २० अंक वगैरे लक्षात ठेवतात. काहीजण तर हजारापर्यंत लक्षात ठेवतात. पण इतकी तीव्र स्मरणशक्ती नसणारे काही जण काही वाक्य तयार करून ठेवतात. वाक्यातील शब्द जितक्या अक्षरांनी तयार झालेले आहेत तितक्या अक्षरांची संख्या म्हणजे **π** ची किंमत!

π ची किंमत लक्षात ठेवण्यासाठी अनेक जण काही युक्त्या वापरतात. पुढील युक्त्या पहा.

1. 'May I have a small container of coffee?'
   या विधानातील प्रत्येक शब्दातील अक्षरांची संख्या मोजा व लिहा. तुम्हाला π ची अंदाजे किंमत मिळेल (3.1415926)
2. 'How I wish I could calculate pi' या विधानाबाबतही वरील प्रमाणेच प्रयोग करा. π ची अंदाजे किंमत मिळेल.
3. "Wow! I made a great discovery" (3.14159...)
4. π च्या किंमतीतील दशांश स्थळातील 32 वा अंक 0 आहे. (3.14159 26535 89793 23846 26433 83279 50288..)

तिथे मात्र काय करणार हा प्रश्न येतोच येतो, कारण अक्षरच नाही असा शब्द कसा लिहिणार.

प्रत्येक जण अशी आणखी एखादी तरी युक्ती शोधू शकतो !

हिरोयुकी गोटा (Hiroyuki Goto) यांनी तर विश्वविक्रम केला आहे. **π** च्या किंमतीच्या वर्गातील (वर्ग म्हणजे त्या संख्येला त्याच संख्येने एकदा गुणणे, जसे ३ x ३ = ९ = $३^{२}$) ४२००० पेक्षा अधिक अंक त्याने ९ तासात म्हणून दाखविले!

थोडी + गंमत π बद्दल!

१. लिओनार्दो दि व्हिन्सी (1452-1519), अल्ब्रेख्त दुरेर (Durer) (1471-1528) या कलावंतांनीदेखील π ची किंमत शोधण्याचा प्रयत्न केला.

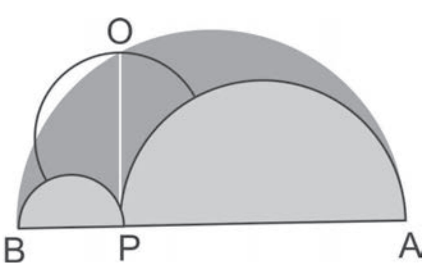
२. π च्या पहिल्या 1 दशलक्ष किमतीत 0 हा अंक 99959 वेळा, 1 हा अंक 99758 वेळा, 2 हा अंक 100, 026 वेळा, 3 हा अंक 100,229 वेळा, 4 हा अंक 100, 230 वेळा, 5 हा अंक 100, 359 वेळा, 6 हा अंक 99548

वेळा, 7 हा अंक 99800 वेळा, 8 हा अंक 99985 वेळा, 9 हा अंक 100, 106 वेळा आला आहे!

३. π ची किंमत शोधणे हे काम संगणकालाही अत्यंत जिकिरीचे, त्रासाचे, कटकटीचे असते!

४. π च्या किंमतीतील 359 वी संख्या 360 ही आहे! वर्तुळाचे अंशात्मक माप असते 360 आणि π ही संख्या वर्तुळाशी निगडीत आहे हे ही विशेष आहे.

५. इथं एक मोठं अर्धवर्तुळ दाखविले आहे. त्याचा व्यास BA. बिंदू P हा BA वरील कोणताही एक बिंदू आहे. BP व्यास घेऊन एक अर्धवर्तुळ काढले आहे. PA व्यास घेऊन एक अर्धवर्तुळ काढले आहे. मोठ्या अर्धवर्तुळातून या दोन्ही अर्धवर्तुळांचे मिळून क्षेत्रफळ कमी केल्यास बिंदू P पाशी काढलेला लंब (म्हणजे PQ) व्यास असणाऱ्या वर्तुळाच्या क्षेत्रफळाइतके असते. हा प्रश्न व या प्रकारचे अनेक प्रश्न सोडविताना π चा विचार करावा लागतो.



पाय आणि नदीच्या मार्गाचा संबंध

नदीचा मार्ग आणि π यांचा काही संबंध असू शकतो याची कल्पना स्वप्नातदेखील कुणी करणार नाही. पण वस्तुस्थिती आहे खरी तशी!

केंब्रिज विद्यापीठातील भूगर्भशास्त्रज्ञ हान्स स्टोलम यांनी असं दाखवून दिलंय की नदीच्या एकूण लांबीच्या दुपट्टीचं, नदीच्या उगम आणि शेवटापर्यंतचं सरळ रेषेतील अंतराशी घेतलेलं गुणोत्तर π च्या अंदाजे ३.१४ किमतीपाशी पोहोचतं! होती का कधी ही कल्पना?

ज्यांच्या जन्मदिनांकाशी संबंधित π दिवस साजरा केला जातो त्या अल्बर्ट आईनस्टाईन (१८७९-१९५५) यांनी, नद्या

अल्बर्ट आईनस्टाईन
(१८७९-१९५५)

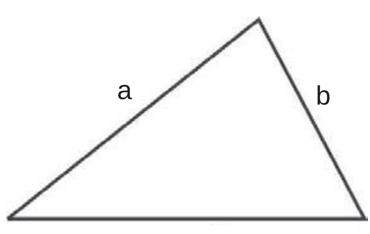
वळणावळणानं प्रवास करण्याची कारणमीमांसा पहिल्यांदा केली ! नदीचा लहान वक्राकार भाग, प्रवाहाला बाहेरच्या बाजूनं जास्त दाब उत्पन्न करतो आणि परिणामी तिथला काठ जादा झिजतो असं त्यांनी सप्रमाण सांगितलं.

नैसर्गिक संख्या आणि (π)

आपल्या सगळ्यांना १, २, ३, ४, ५, ... या संख्या नैसर्गिक संख्या म्हणून ठाऊक आहेत. विशेष म्हणजे यांचे गुणाकार व्यस्त घेतले. (गुणाकारव्यस्त संख्या म्हणजे संख्यांचे खाली डोके वर पाय) तर आपल्याला मालिका मिळेल.

$$\frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\dots$$

अशी! विशेष म्हणजे या संख्यांच्या वर्गांची बेरीज केली की त्यांचे π शी नाते तयार होते हे वाचले की आश्चर्याला व आनंदाला सीमाच राहात नाही.!!!



लिनोहार्द ऑयलर यांनी ही मालिका निर्माण केली, शोधली. भूमितीतील संकल्पनांसाठी नवनवीन अक्षरे शोधणारा हा अत्यंत महान गणिती होता. (त्रिकोणाच्या बाजू a, b, c या लहान अक्षरांनी दाखविण्याचे श्रेय त्यांनाच जाते, त्रिकोणाच्या अर्धपरिमितीसाठी s अक्षर वापरण्याचे काम यांचेच, त्रिकोणाच्या अंतवर्तुळाची त्रिज्या r ने दाखविण्याचे त्यानेच ठरविले. f(x), e वगैरेंचाही शोध त्यांचाच!, एकूण बेरजेसाठी वापरले जाणारे चिन्ह Σ (उच्चार सिग्मा) हे देखील यांचेच.).

लिओनार्दो पिसानो (११७०-१२५०) याने (याचे दुसरे नाव फिबोनॅस्सी) π ची किंमत ३.१४१८१८... अशी असणारे असे १२२३ मध्ये लिहिलेल्या लेखात म्हटलंय. संख्या लेखनाची भारतीय, हिंदू पद्धत जगाला सांगणारा हा विशेष गणिती

लिओनार्दो पिसानो
(११७०-१२५०)

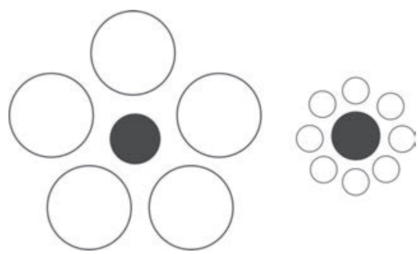
होता. त्यांच्याही अगोदर, चीन मधील गणिततज्ञ झू चाँगत्झी (Zu Chongzhi) (429-500) यांनी π ची किंमत ३५५/११३ म्हणजे ३.१४१५९२... अशी काढलेली होती.

थोर गणिती रामानुजन यांनी तर πच्या किंमतीसाठी (२१४३/२२)[१४] अशी राशी दिली आहे. इथं १/४ म्हणजे संख्येचे चौथे मूळ असा अर्थ आहे. दशांशाच्या ९०च्या स्थळांपर्यंत उत्तर मिळेल अशी ही एक क्रमणिका त्यांनी दिली आहे.

π च्या मौजमजेत भर घालूया!

अ) π च्या किंमतीतील दशांश अपूर्णांकतील अंक कधीच संपणारे नाहीत किंवा त्याच गटागटाने पुन:पुन्हा येणारेही नाहीत. त्यामुळे मौजेत भर पडली आहे. जगातील कोणत्याही व्यक्तीचा जन्म दिनांक आपल्याला π मध्ये सापडतो ! आश्चर्य वाटलं ना? जन्मदिनांक कशाला, कुठलाही महत्त्वाचा दिनांक पहा. उदा. १५ ऑगस्ट १९४७ ला भारत स्वतंत्र झाला. आता हे अंक (८१५४७) π च्या किंमतीत कितव्या स्थानावर येतात पहा : ७४२७ व्या स्थानावर येतात माहितीच्या महाजालात, इंटरनेटवर अशी अनेक संकेतस्थळे आहेत जिथे तुम्हाला अशी विलक्षण गोष्ट पहायला मिळते! शोधा म्हणजे सापडेल आणि शोधले की सापडतेच, हेच खरे!

आ) इथलं शेजारचं चित्र पहा. रंगविलेली दोन्ही वर्तुळं सारखी आहेत? हो आहेत (च). हे सिद्ध करायला π चा (च) विचार करायला लागतो.



इथं एक काल्पनिक चित्र दाखवलं आहे. एक मोठा वर्तुळाकार केक अनेकांना खायला दिला जात आहे. केकचे लहान लहान तुकडे केले आहेत.

वर्तुळाची त्रिज्या r आहे. लोकांच्या लक्षात आले की आपल्याला दिला जाणारा तुकडा काटकोन त्रिकोणाकृती आहे. (तेव्हा पाया आणि उंची (म्हणजे *l* आणि r) यांच्या गुणाकाराच्या निम्मे क्षेत्रफळ असणारा म्हणजे

$1/2 \times r \times l$ असा तुकडा प्रत्येकाला मिळाला.) पण हुशार आर्किमिडीजनं सांगितलं (होय, चित्रात कमरेवर हात ठेवलेला दिसतोय ना तोच!!) की सगळ्यांचे तुकडे मिळून तर वर्तुळ होतयं तेव्हा वर्तुळाची कड (म्हणजे परिघ) २πr आहे, उंची r म्हणजे त्रिज्या. $1/2(2\pi r \times r) = \pi r^2$ असं वर्तुळाचं क्षेत्रफळ झालं!

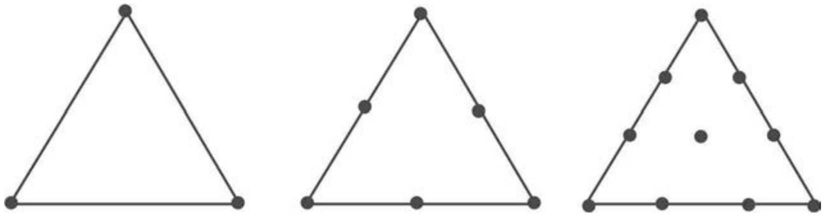
सायकलच्या चाकानं कापलेलं अंतर शोधण्यासाठी आपल्याला चाकाचे एकूण किती फेरे झाले आहेत आणि एका फेऱ्यात चाकानं किती अंतर कापलं आहे हे शोधायला हवं. एका फेऱ्यात चाकानं कापलेलं अंतर शांधायचं तर चाकावर एका ठिकाणी रंगाची खूण करूया आणि त्या खुणेपासून जमिनीवर ते चाक त्याच खुणेपाशी केव्हा टेकेल ते अंतर मोजूया. हे अंतर म्हणजे चाकाचा परिघ होय.

चाकाचा परीघ काढण्याचं सोप सूत्र आहे. चाकाच्या व्यासाला ३.१४ ने गुणा.

अर्थात हे अंतर अगदी अचूक नाही. व्यवहारापुरतं ठीक आहे. व्यास म्हणजे वर्तुळाची सर्वात मोठी जीवा. परीघ (C) अक्षरानं दाखवितात तर व्यास D अक्षरानं म्हणून C = 3.14 x D.

पण हे ३.१४ एकदम कुठून आले?

मोठ्या चाकाची सायकल चालवायला, लहान चाकाच्या सायकल चालविण्यापेक्षा अधिक कष्ट लागतात. समजा एका चाकाचा व्यास ७७ से.मी. आहे तर त्या चाकाची लांबी होईल २४२ से.मी. आणि दुसऱ्या चाकाचा व्यास आहे ५६ से.मी. आहे तर त्या चाकाची लांबी होणार १७६ से.मी. त्यामुळे जास्त अंतर कापायला जास्त श्रम पडणार हे नक्की झालं. वेगवेगळ्या व्यासाच्या चाकांसाठी असाच प्रयोग केला की, परीघ आणि व्यास एकमेकांच्या प्रमाणात आहेत हे कळलं. परीघ आणि व्यास यांचं गुणोत्तर स्थिर असतं असं आढळलं आणि ग्रीक भाषेत त्याला नाव दिलं π (उच्चार पाय्).



वृत्तचितीच्या तळाचं क्षेत्रफळ म्हणजे वर्तुळाचे क्षेत्रफळ. समान त्रिज्येची अनेक वर्तुळं एकमेकांवर ठेवली की दंडगोल तयार होणार. समजा त्याची उंची h. तर तळाच्या क्षेत्रफळाला (πr^2) उंचीन (h ने) गुणले की घनफळ मिळणार. सूत्र झालं $\pi\ r^2h$. गोलाच्या घनफळासाठी 4/3 πr^2 असं सूत्र वापरतात पण ते कसं हे समजून घेण्यासाठी महाविद्यालयीन गणित लागतं.

जरा पुढचं आणि मजेचं शिकूया.

अ) परिपूर्णसंख्या : ६ ही संख्या परिपूर्णसंख्या आहे. ६ला भाग घालविणाऱ्या १, २, ३, या संख्यांची बेरीज ६ आहे. (इथं ६ ला ६ नं भाग जात असला तरी बेरजेत ६ धरले नाहीत.) पुढची परिपूर्ण संख्या आहे. २८ (कारण १ + २ + ४ + ७ + १४ = २८) (आजपर्यंत ठाऊक असणाऱ्या परिपूर्ण संख्या सम संख्या आहेत हे आणखी एक विशेष!)

विशेष म्हणजे π च्या दशांश स्थळातील पहिल्या ३ अंकांची बेरीज परिपूर्ण संख्या आहे.

(३.१४१५... = १ + ४ + १ = ६)

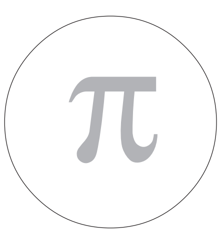
आ) त्रिकोणसंख्या : १, ६, १०, १५, २१.... ही त्रिकोणी संख्यांची मालिका आहे. त्रिकोणी म्हणावयाचे कारण तितके ठिपके दिले की त्रिकोण तयार होतो. π च्या दशांश स्थळातील पहिल्या तीन अंकांची बेरीज ६ आहे. ६ ही त्रिकोणी संख्या आहे. तसेच परिपूर्णसुद्धा! पहिल्या ७ अंकांची बेरीज केली. २८ ही त्रिकोणी संख्या आहे. २८ ही परिपूर्ण संख्या आहे.

पाय् (π) आणि (π) ची ही अद्भूत कहाणी तुम्हाला आवडली असणार!

देवीदास झोडगे,

न्यू इंग्लिश स्कूल, टिळकरोड, पुणे

दूरभाषा क्रमांक : ०२० – ३२४२७४३९

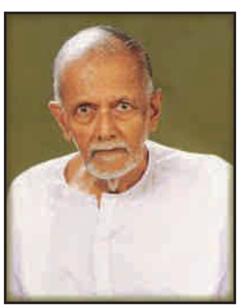


गणितातील अवलिया

कौशल्य शिकवावे लागते.
तर कल्पना मनातून फुलून याव्या लागतात.

इति पी.के.एस

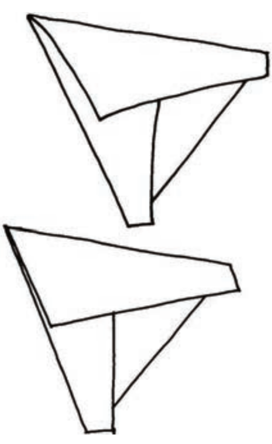
एखाद्या वस्तुचे सम्यक ज्ञान होण्यासाठी सर्वात प्रथम त्या वस्तुचा अनुभव घेण्याची गरज असते. हा अनुभव अनेक अंगांनी लहान मूल घेत असते. उदाहरणार्थ वस्तुकडे पहाणे, वस्तुचा स्पर्श घेणे, नाद ऐकणे, चव घेणे, वास घेणे, निवड करणे, निरनिराळ्या वस्तुंची जुळणी करणे व त्या वस्तू विसकटून टाकणे अशा अनेक प्रकारचे अनुभव मूल घेत असते. त्याचे 'कृतीतून शिक्षण' चालू असते. हंगेरी नावाच्या एका लहान देशात कृतीतून शिक्षण हे तंत्र गणित शिक्षणासाठी वापरले जाते. त्यामुळेच हंगेरीने जगप्रसिद्ध गणिती घडवले आहेत. त्यांच्या ज्ञानाचा उपयोग सर्व जगाला होत आहे. तेथे 'कृतीतून गणित शिक्षण' हे आश्चर्यकारक काम कसे केले जाते हे आपण Teach TV(http/www.teachers tv/video/17878) या संकेतस्थळावर पाहू शकतो.

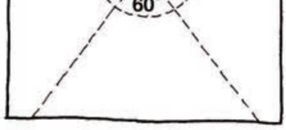


आणि ते आपल्याला मोफत डाऊनलोड करता येते. 'कृतीतून गणित शिक्षण' या तंत्राचा मिशनरी वृत्तीने व तेही एकट्याने जास्तीतजास्त उपयोग करणारे पी. के. श्रीनिवासन् हे गणित प्रेमी गृहस्थ आपल्या भारतात होऊन गेले. त्यांचा उल्लेख येथून पुढे पीकेएस असा आपण करू. या क्षेत्रात काम करणाऱ्या कोणत्याही गणित प्रेमीपेक्षा पीकेएस यांचे काम जास्त होते. सर्व शास्त्रांत अग्रगण्य मानल्या गेलेल्या गणित या अति सुंदर विषयाबद्दल पीकेएस यांनी मुलांच्या मनात स्फूर्ती व प्रेम उत्पन्न करण्याचे व वाढवण्याचे काम आयुष्यभर व अविरतपणे केले. पीकेएस यांनी केलेल्या कार्याचा अगदी थोडक्यात परिचय करून देणारा हा लेख म्हणजे संदर्भच्या वाचकांसाठी एक अमूल्य देणगीच आहे. पीकेएस यांना व त्यांच्या कार्याला सलाम!

गणित म्हणजे पीकेएस यांचा श्वास होता 'मनी वसे ते स्वप्नी दिसे' या उक्तीप्रमाणे त्यांना स्वप्नातही गणित दिसत असे! त्यांच्या गणित साधनेच्या मार्गात जर कोणी काही विरोधात्मक विधाने केली तर ते त्याच्या विधानांवर अगदी हिरिरीने तुटून पडत असत व त्याची विधाने खोडून काढीत असत.

पीकेएस यांची आणि माझी पहिली भेट १९८६ साली झाली. त्यावर्षी NCERT ने पाँडीचेरी येथील श्री. अरविंदाश्रमात गणित शिक्षकांसाठी एक वर्कशॉप आयोजित केले होते. अर्थात त्यासाठी पीकेएस यांनाही बोलावले होतेच. त्याकाळी झेरॉक्सची सोय नव्हती म्हणून आपले व्याख्यान सुरू करण्यापूर्वी त्यांनी आयोजकांकडून सायक्लोस्टाईल कागदाचा एक रीमचा गठ्ठा (५०० पाने = १ रीम), गोंद, वर्तमान पत्राचे जुने रद्दी कागद, स्टेपलर आणि एक कातर हे साहित्य मागवले, यानंतर त्यांनी तेथे जमलेल्या प्रत्येक शिक्षकाला सायक्लोस्टाईलच्या पेपरच्या गठ्ठ्यातून प्रत्येकी एक कागद दिला. कागदाचे वाटप पूर्ण झाल्यावर ते म्हणाले, तुम्हाला दिलेल्या कागदाच्या अशा घड्या घाला की त्यामुळे दोन घड्यांमध्ये ६०° चा कोन होईल. पोहता न येणारा माणूस जर खवळलेल्या सागराच्या काठाशी उभा राहिला तर तो जसा भांबावून जाईल त्याप्रमाणे पीकेएस यांनी विचारलेल्या प्रश्नामुळे सर्व शिक्षक भांबावून गेले. कारण यापूर्वी सर्वच शिक्षक दिलेला कोन मोजण्यासाठी किंवा सांगितलेला कोन ओळखण्यासाठी 'कोनमापक' हेच एकमेव उपकरण वापरीत होते. कोनमापका शिवाय दुसरे उपकरण किंवा दुसरी पद्धत कोणालाच माहीत नव्हती म्हणून ते सर्व शिक्षक विचार करू लागले व त्याप्रमाणे करून पाहू लागले. त्यांच्या या खटाटोपात १५ मिनिटे वेळ गेला. शेवटी आपल्याला हे काम जमणार नाही असे वाटल्यामुळे सर्वांनी हा विषयच सोडून दिला.



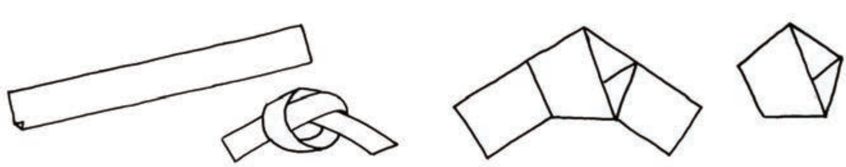


शिक्षकांची व्यर्थ चाललेली धडपड पाहून शेवटी पीकेएस जागेवरून उठले व त्यांनी एका कागदाचे समान ३ भाग होतील अशा रीतीने कागदाच्या घड्या घातल्या

व लगतच्या दोन घड्यांमध्ये ६०° चा कोन होतो हे दाखवून दिले. ते पाहून सर्व शिक्षक विलक्षण अचंबित झाले. शिक्षकांच्या दृष्टीने हा प्रयोग म्हणजे एक सुंदर चमत्कारच होता. नंतर पीकेएस यांनी कागदाला निरनिराळ्या सहा प्रकारे घड्या घालून ६०° चा कोन करता येतो, हे प्रत्यक्ष कृती करून दाखवून दिले. त्यापैकी एक पद्धत उदाहरण म्हणून येथे देत आहे. दिलेल्या कागदाच्या पट्टीचे समान तीन भाग होतील अशा घड्या घातल्या व नंतर विशिष्ठ पद्धतीने कागदाच्या पट्टीच्या पुन्हा दोन घड्या घातल्या तेव्हा समभुज त्रिकोणाची आकृती मिळाली; त्या समभूज त्रिकोणाचे सर्व कोन ६०° चे होते!

दिलेल्या कागदाला तऱ्हेतऱ्हेच्या पद्धतीने घड्या पाडून समचतुर्भुज चौकोन, षटकोन, अष्टकोन इत्यादी भौमितीय आकृत्या तयार करण्यात शिक्षक दिवसभर गुंग झाले होते. तेव्हा त्यांना जाणवले की कागदाला घड्या पाडून पंचकोनाकृती तयार करता येत नाही. सर्व बहुभुजाकृतींच्या बाजूंची संख्या २, ४, १६, ३२ अशा असतात. तर मग पंचकोनाकृती कशी तयार करायची? हा प्रश्न त्यांनी पीकेएस यांना विचारला त्यावर त्यांनी उत्तर दिले की हे काम अगदी सोपे आहे. फक्त त्यासाठी युक्तीचा वापर करावा लागतो. "Some Geometrics in Paper Folding" हे पुस्तक इसवी सन १८८३ मध्ये टी. सुंदर राव या भारतीय गणितज्ञाने लिहीले. त्यात या विषयाचा ऊहापोह केलेला आहे. ओरिगामी आणि गणित या विषयावर लिहीलेले हे पुस्तक जगातील पहिलेच पुस्तक पंचकोनाकृती कशी तयार करायची या प्रश्नाचे उत्तर त्या पुस्तकांत दिलेले आहे. ते असे – A-4 साईजच्या कागदाची ३ सेंटीमीटर रूंदीची लांब पट्टी कापा पट्टीला एक साधी गाठ मारा. कागदाची पट्टी दोन्ही टोकांनी ओढा. गाठ सपाट केल्यावर तुम्हाला पंचकोनाकृती मिळेल! पंचकोनाकृती तयार करण्यासाठी कागदाच्या पट्टीला किती व कशा पद्धतीने घड्या पाडाव्या लागतात आणि पट्टीला किती गाठी माराव्या लागतात हे समजले का?

त्या वर्कशॉपमध्ये शिक्षकांनी कागदाला घड्या पाडून ८० पेक्षा जास्त आकार तयार केले. त्यापैकी काही आकार द्विमितीय होते तर काही आकार त्रिमितीय होते. द्विमितीय आकार तेथल्या तेथेच



वर्तमानपत्राच्या फाईलमध्ये पिन मारून ठेवले. चौरसाकृती कागदाचे कोनमापक त्यांनी तयार केले. त्या कोनमापकावर डझनभर कोन दाखवता येत होते. या सर्व कामाचा शिक्षकांना अत्यानंद झाला. BEd च्या दोन वर्षाच्या कोर्समध्ये त्यांना जे शिकता आले नाही ते त्यांना या वर्कशॉपमध्ये दोन दिवसात शिकता आले!

आणि या शिबीरामुळे आपण आजकाल शाळेत जे शिकवतो ते गणित वास्तवापासून किती दूर गेले आहे या वादग्रस्त मुद्याची जाणीव झाली. पूर्वीच्या काळी शिंपी, तांबट यांच्या कामातून गणिताचा विकास झाला. गणिताची पाळेमुळे खूप सरावातच रुजलेली आहेत हे समजते. गणिताच्या परिभाषेत उद्योगातील शब्दांचा खूप भरणा आहे. म्हणजेच उद्योगातील शब्दांनी ती समृद्ध आहे. उदाहरणार्थ इंग्रजीतला 'स्ट्रेट लाईन' हा शब्द. लॅटीन, भाषेतून आला आहे. लॅटीन भाषेत 'स्ट्रेचेड लिनन' असा शब्द आहे. शेतात एका रेषेत बटाटे लावायचे असत तेव्हा शेतकरी एक सुतळी दोन्ही टोकांकडून ताणून धरीत व सरळ रेषेत बटाट्याची रोपे लावीत असत. भिंतीचे बांधकाम सरळ रेषेत येण्यासाठी गवंडी ओळंब्याचा (सरळ ताठ दोरी) उपयोग करीत असत. व त्याप्रमाणे विटा रचत असत लॅटीन भाषेतील स्ट्रेचेड लिननचे रूपांतर स्ट्रेट लाईन मध्ये झाले. हाताच्या दहा बोटांना लॅटीन भाषेत 'फिंगर' म्हणतात आपण १ ते १० आकडे सर्रास हाताच्या बोटावरून मोजतो.

आजचे शालेय गणित खऱ्या जीवनापासून पार दुरावलेले आहे. सध्या तयार केलेला सगळा अभ्यासक्रम अर्थहीन बोलीभाषेने लडबडलेला वाटतो. या मागच्या धोरणाने गणिताचे सर्व सौंदर्य व आनंद यांचा बळी गेला आहे. शाळेत फारच क्लिष्ट पद्धतीने गणित शिकवले जाते. त्यामुळे मुलांच्या मनात या सुंदर विषयाबद्दल आकस (नावड) उत्पन्न होतो. मुलांना या विषयाची गोडी लावायची असेल तर प्रत्यक्ष कृतीतून ती निर्माण करणे हा व्यवहार्य मार्ग आहे, नव्हे ती फारच जरूरीची गोष्ट आहे.

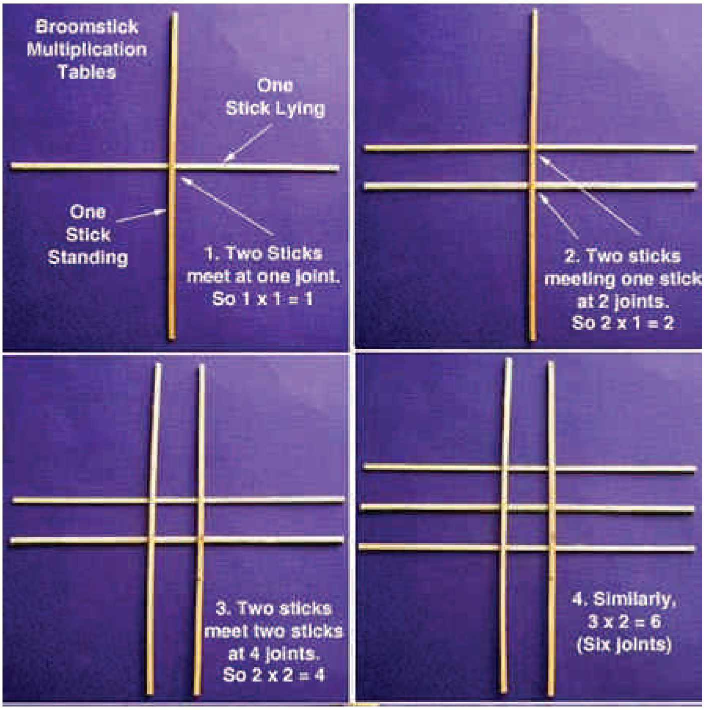
मुलांच्या मनात गणित बिंबवण्यासाठी पीकेएस यांनी खूप कष्ट घेतले. आपल्या अवतीभवती सगळीकडे गणितच ठासून भरले आहे हे त्यांनी लोकांना सांगितले. त्यासाठी आरडाओरडाही केला. रदबदली पण केली. समाज आपले ऐकत नाही हे पाहून त्यांना फार दु:ख झाले. दु:खाचे कढ असह्य होऊन ते एकांतात धाय मोकलून रडलेसुद्धा पण त्यांनी 'हिंदू' वर्तमानपत्रात ६० उत्कृष्ट स्फूटलेख लिहीले व आपले प्रयत्न चालू ठेवले. नाण्यांमध्ये, आगपेटीच्या काड्यात, प्रत्येक चौकोनात, कॅलेंडरात, बसच्या तिकीटात आणि आजूबाजूच्या वस्तुत गणित आहे हे त्यांनी प्रयत्नपूर्वक व

प्रात्यक्षिक करून दाखवून सिद्ध केले. NCERT ने हे लेख पडताळून पाहिले व बऱ्याच विचारमंथनानंतर त्याचे पुस्तकात रूपांतर केले. त्या पुस्तकाचे नाव 'Resource Material for Mathematics Club Activities'. गणितातील खेळ/ मनोरंजनाचे हे विलक्षण सुंदर पुस्तक भारतात निर्माण झाले आहे. ते मोफत डाऊनलोड करता येते. त्याचे संकेतस्थळ (http/ gyanpedia in/tft/Resource/books/ pkshindu.pdf.) हे आहे. त्याची आवृत्ती संपल्यानंतर जवळपास दहा वर्षानंतर त्या पुस्तकाचे पुर्नमुद्रण झाले.

पीकेएस नेहमीच नशीबवान ठरले नाहीत. सत्तरीच्या दशकात त्यांनी दोन आश्चर्यकारक पुस्तके लिहीली (1) Number fun with the calendar व (2) Romping in Numberland आपली संशोधनात्मक पुस्तके छापण्यासाठी त्यांनी लहान प्रकाशकाकडून मोठ्या प्रकाशकाकडे धाव घेतली. त्यांच्या येरझारा म्हणजे व्यर्थ धावपळ झाली. बाजारात मिळणारी गणितावरील मार्गदर्शक पुस्तके (गाईड) त्यांनी लिहावी अशी सर्व प्रकाशकांची इच्छा होती. म्हणजे ती पुस्तके लगेच अभ्यासक्रमाला जोडली गेली असती. पण पीकेएस यांनी ते नाकारले. त्यांचे सर्वात प्रबळ शत्रू म्हणजे त्यांचे सहकारी शिक्षकच होते. पीकेएस यांची विद्यार्थीप्रियता त्यांना पाहावत नव्हती. त्यापैकी काहीजणांनी त्याकडे काणाडोळा केला तर काहींनी त्यांना मार सुद्धा देवविला!

त्यांच्या विद्यार्थ्यांच्या मनात त्यांच्याबद्दल आदरयुक्त प्रेम होते. गणित शिकवतांना त्यांनी ज्या प्रेरणा दिल्या त्या ते विद्यार्थी कधीच विसरू शकले नाहीत. ८०च्या मध्यदशकात १५ वर्षानंतर, त्यांची दोन पुस्तके Number fun with the calender व Romping in Numberland त्यांच्या एका विद्यार्थ्याने प्रसिद्ध केली. तो विद्यार्थी चेन्नईत आईस्क्रीम उद्योगातून अमाप पैसा मिळवत होता. त्याने जणू ही गुरूदक्षिणाच दिली. ही पुस्तके खालील संकेत स्थळावरून डाऊनलोड करता येतात. (http://gyanpedia.in/fromtft/ Resources/books calendar pdf आणि http:// gyanpedia.in/tft/Resources/ books/rompingin number landing/pdf) परंतु अरेरे! सरकारी संस्थाच्या अनास्थेमुळे आणि खाजगी स्वयंसेवी संस्थाच्या कार्यकर्त्यांकडूनही आजही आपल्या भारतात चांगल्या पुस्तकांची दखल घेतली जात नाही.

बहुतेक वेळा मुले पाढे पाठ करतात. पुन्हा पुन्हा पाढे म्हणण्यामुळे ते चांगले लक्षात रहातात व वेळेवर आठवतात, पण त्यामुळे गणित शिकण्यातील आनंद व गंमत पूर्णपणे नष्ट होते. खराट्याच्या समान



लांबीच्या फक्त १८ काड्यांनी मुलांना त्यातली गंमत व आनंद मिळवून देता येईल. व त्यांना सर्व पाढे येऊ शकतील.

उदाहरणार्थ १) खराट्याची एक काडी आडवी ठेवा. त्या काडीवर दुसरी काडी उभी ठेवा किती स्पर्श बिंदू मिळतात?.... एक म्हणजेच १ x १ = १ तसेच २ काड्या उभ्या ठेवून त्यावर ३ काड्या आडव्या ठेवा. आता किती स्पर्श बिंदू मिळतात?.... सहा म्हणजेच २ x ३ = ६

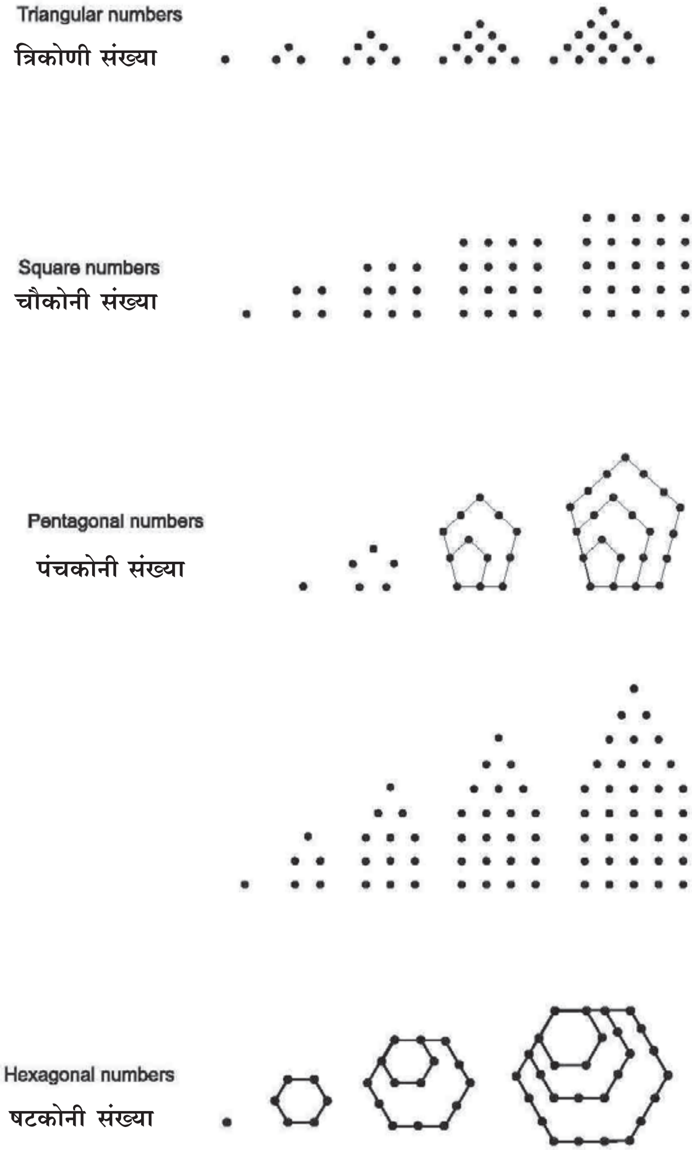
मुले १, २, ... असे पाढे ९१ ..... १०० पर्यंत लिहू शकतात. असे पाढे कागदावर लिहीले तर त्याला 'पट' म्हणू. या पटावरसुद्धा एका संख्येसाठी उभी काडी ठेवली व दुसऱ्या संख्येसाठी आडवी काडी ठेवली व स्पर्शबिंदु मोजले तर त्या दोन संख्यांचा गुणाकार समजतो. याप्रमाणे आपल्याला २ x ० = ० आणि ० x ० = ० ही उत्तरे सुद्धा समजतील.

संख्या मोठ्या असतील तर १० काड्यांसाठी कागदाची १ पट्टीच वापरली तर वरील कृती करून आपल्याला मोठ्या संख्यांचे गुणाकार समजतात.

■■

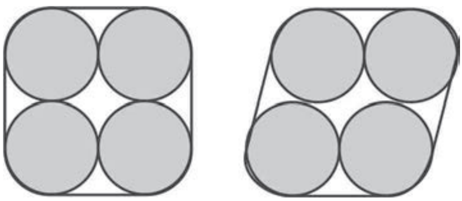
लेखक : **अरविंद गुप्ता**
अनुवाद : **गो. ल. लोंढे,** निवृत्त प्राचार्य.

गंमत आकृतीय संख्याची



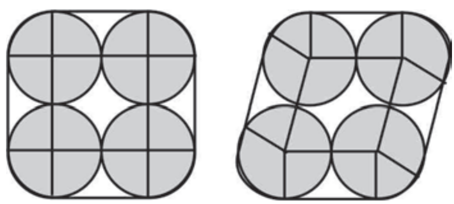
पाय (π) मधील विरोधाभास

एखादे विरोधीभासी वाटणारे वाक्य हे सत्य ही असू शकते. भूमितीमध्ये बऱ्याच प्रकारात विरोधाभास दिसून येतो. खालील उदाहरणावरून हे लक्षात येईल. आकृती १ मध्ये दाखविल्याप्रमाणे एका रबर बॅन्डने बांधलेल्या चार सारख्या आकाराच्या वर्तुळाकार वस्तू विचारात घ्या. या वर्तुळाकार वस्तूंची स्थिती आकृती २ प्रमाणे बदला. कुठल्या आकृतीत रबर बॅन्ड जास्त लांब दिसतो?



आकृती १ आकृती २

आपण जर आकृती ३ आणि ४ यांचे निरीक्षण केले, तर असे लक्षात येईल की, प्रत्येक आकृतीतील रबर बॅन्ड हे चार रेषाखंडानी बनले आहे, ज्याची लांबी वर्तुळाच्या व्यासाएवढी आहे. म्हणूनच फक्त वर्तुळाकार कंसाच्या लांबीची तुलना करणे गरजेचे आहे.



आकृती ३ आकृती ४

आकृती ४ च्या मधल्या भागात एक समभुज चौकोन तयार झाला आहे. यातील प्रत्येक रबर बॅन्डचा कंस हा समभुज चौकोनाच्या एकका कोनाला पूरक आहे. जशी कोणत्याही चौरसाच्या कोनांची बेरीज ३६०° असते तशीच समभुज चौरसाच्या कोनांची बेरीज पण ३६०° असते. त्याप्रमाणेच रबर बॅन्डच्या कंसांची बेरीज ही ३६०° च असली पाहिजे आणि उरलेल्या (शिल्लक राहिलेल्या) रबर बॅन्डची लांबी ही वर्तुळाच्या परीघाएवढी असली पाहिजे. आता बघा, निरीक्षण करा. दोन्ही रबर बॅन्डची लांबी समानच असते फक्त आकृती बघताना आपल्याला वेगळा भास होतो. ■■

अनुवाद: **जयंती साने**

सर्वात जास्त किमती शून्य

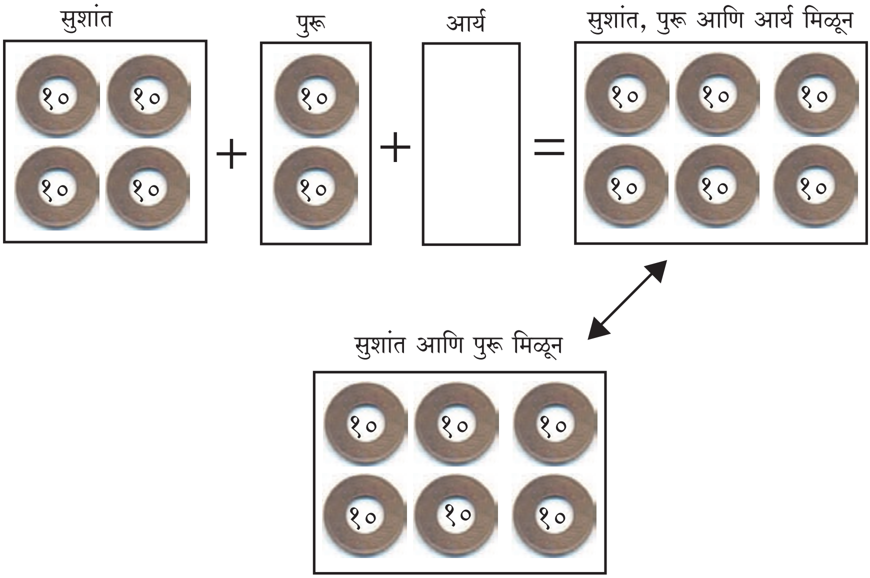
लेखक : किरण बर्वे

छोटा भीम खरोखरच छोटा, लहान होता. आज स्वारी फुरंगटून गेली होती. रागावत म्हणाला ''काकू, शून्य सर्वात महत्त्वाचे असे काकाच सांगतात, मग मला शून्य मार्क मिळाले तर आई, बाबा दोघेही रागावले, 'बरोबर नाही हे''' हसू दाबत काकू म्हणाल्या ''बघ आता येतीलच सगळे, मग काका तुम्हाला गोष्ट सांगतील 'मग काय मजाच''' काका हसले आणि म्हणाले ''गोष्ट, आणि ती सुद्धा शुन्याचीच सांगीन'' ''मी मग लगेच घरी सांगीन. नो प्रॉब्लेम'' इतक्यात मित्र आलेच होते. भीमला जरा चिडवले, काकू त्यांना रागावल्या इ. सगळे पार पडले एक दोन मिनिटात. आणि काकांनी सुरुवात केली.

'खूप खूप वर्षांपूर्वी म्हणजे नक्कीच दीड हजार वर्षापूर्वीची गोष्ट आहे. (गोष्ट कधी अगदी तशीच घडते असे थोडेच आहे पण मुद्दा तोच असतो, परिणाम तेच असतात.) तर गोष्ट आहे हजारो वर्षां पूर्वीची, त्यावेळची की ज्या वेळेला शून्य ही संख्या म्हणजेच, शून्य ही कल्पनाच मानवाला माहीत नव्हती.

बाजारात पडला प्रश्न

पूर्वी शाळा म्हणजे गुरूंच्या घरी रहायला मुले जायचे. तेथे कामे करत आणि गुरुजींचे शिकवणे समजून घेत. शिक्षण होत असे जीवन शिक्षण. आता हे जरा वेगळ्या पद्धतीने केले जात आहे अनेक शाळांत. नेहाने टोकले 'काका गोष्ट' 'तर खूप खूप वर्षांपूर्वी गणक मुनींच्या आश्रमात तीन मित्र शिकत होते, सुशांत, आर्य आणि पुरू. त्यांना कधी कधी गावात जाऊन काही गोष्टी विकत आणाव्या लागत. आजच्या आपल्या रुपया ह्या चलनासारखे तेंव्हा पण्य नावाचे चलन होते. सुशांतला चाळीस पण्य दिले होते तर पुरू जवळ वीस. आर्यला नुसते बरोबर जायला सांगितले होते. जाताना एका मोठ्या शिष्याने विचारले, सुशांत आणि पुरूला 'तुम्हा



दोघांकडे मिळून किती पण्य आहेत?' उत्तर दिले साठ. मग त्याला आर्यही दिसला त्याने परत विचारले; 'आता तुमच्या सगळ्यांकडे मिळून किती पण्य आहेत?' परत उत्तर आले साठ. तो खांदे उडवून पुढे गेला. मित्र ही गावाकडे जाऊ लागले. आर्य मात्र विचार करत होता. सुशांत आणि पुरूकडे मिळून साठ आणि तिघांकडे मिळूनही साठच. तिघांतही तितकेच आणि दोघांतही तितकेच, उत्तरात फरक नाही. पण व्यवहारात फरक आहे. मी पण आहे त्यांच्या बरोबर. माझ्याजवळ काही पण्य गुरूजींनी दिले असते तर बेरीज वेगळीच असती, त्यावेळी दोघांकडच्या पण्यांची बेरीज आणि आम्ही तिघांकडच्या पण्यांची बेरीज वेगळीच आली असती. आता माझ्याकडे काही दिलेले नाही.

एवढ्यात गाव आले. त्यांच्याकडची खरेदी आटोपून ते परत आले. सुशांतकडे ५ पण्य उरले होते. पुरूला जे जे आणायला सांगितले होते ते घेतल्यावर त्याच्याकडे काहीच शिल्लक उरले नाही. जेवढे होते तेवढे त्याच्याकडून गेले. म्हणजे काय काहीच उरले नाहीत. 'आता मात्र भीम वैतागला, ओरडला 'शून्य उरले शून्य'. काकांनी परत सांगितले 'त्यांना त्या वेळी शून्य म्हणजे काय हे माहीतच नव्हते.'

ते मित्र परत येत असताना आर्यचे विचारांचे रीळ परत उलगडायला लागले. ते थांबेच ना. मगाशी दोघांकडे आणि

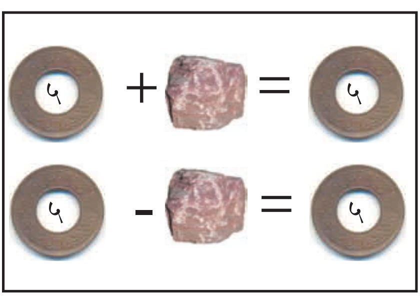
तिघांकडे मिळून सारखेच साठ पण्य आता तर अजूनच गंमत, सुशांतकडे ५ पण्य, पुरूकडे काही उरले नाहीत सगळेच खर्च झाले. त्या दोघांकडे मिळून ही पाचच पण्य. आणि मी धरून सुद्धा तितकेच. मग ह्या तीन गोष्टीत काही फरक आहे का काहीच नाही? पण फरक तर आहेच, रीळ काही धड उलगडत नव्हते. १३५७८ वेळा गुंता झालेला आणि २३९५४ वेळा सोडवायचा प्रयत्न चालू. मग जे काय व्हायचे तेच झाले, दोनदा आर्यचा रस्ता चुकला, त्याला पकडून आणला. परत असेच काही दिवस गेले. मधेच आर्यच्या डोक्यातले रीळ उलगडायचे, गुंता सुटतोय वाटता वाटता अधिकच वाढतोय. गुरू पत्नींनी विचारले सुद्धा, ''बाळ आर्य लक्ष नाही तुझे सध्या फारसा बोलत नाहीस काय होतंय?'' एकदा आर्यनी त्यांनाही सांगायचा प्रयत्न केला ''तुमच्याकडे दोन कळश्या भरून दुध होते, ते सर्व आम्ही प्यायले आता तुमच्याकडे, किती उरले'' त्या बोलल्या, ''लबाडा, दुध शिल्लक नाही, असते तर, दिले असते.'' ''नाही दुध नको शिल्लक नाही म्हणजे अजिबातच घेतले नाही असे नाही, कोणीतरी घेतले आणि मग शिल्लक नाही असेही असेल आणि अजिबातच घेतले नाही तरी तुम्ही म्हणणार शिल्लक नाही.'' गुरूपत्नींनी त्याला नीट आत नेऊन झोपवलं.

काहीतरी सुचले

आर्यला हे कळत नव्हते की दुध शिल्लक नाही, पण्य माझ्याकडे नाहीत, दोघांची बेरीज आणि तिघांची ही बेरीज सारखी ह्यात काहीतरी सूत्र आहे. मात्र हे तो कोणाशीही बोलू शकत नव्हता, आधीच तो नादिष्ट आहे असे स्पष्ट मत होते. पण तरीही दातात एखादा दाण्याचा कण अडकला की कसे जरा वेळ मिळताच आपण तो काढायचा प्रयत्न करतो, निघेपर्यंत आपल्याला शांत बसवत नाही तसेच आर्यचे झाले. झाले म्हणजे काय जोरदार झाले. मग त्याने एक गंमत केली, त्याने एक खडा घेतला, मनाशी ठरवले की हा खडा म्हणजे शिल्लक नाही, काही नाही, फरक पडत नाही असे काहीही त्या त्या वेळे नुसार,

> आर्यने शून्य शोधले म्हणजे ती कल्पना आणि तिचा तत्कालीन गणिताशी सांधा जोडला.
>
> ५ + खडा = ५,
>
> अंक + खडा = अंक,
>
> म्हणजेच क + ० = क असे आपण आज लिहितो.
>
> ५ – खडा = ५,
>
> अंक – खडा = अंक,
>
> म्हणजेच क – ० = क असे आपण आज लिहितो.

बस मग जरा त्याला बरे वाटले. की शिल्लक नाही म्हणजे फक्त तो खडा आहे. पण्य नाही म्हणजे खडाच तेवढा आहे. हळूहळू मग तो बाजारात जाताना म्हणू लागला जर सगळे पण्य संपले की आता माझ्यापाशी खडा तेवढाच आहे बाकी काही नाही. आता कोणी ५ पण्य दिले तर मग पाचच पण्य माझ्याकडे आहेत, ५ पण्य आणि खडा म्हणजेही पाच पण्यच, खडा विसरला तरी चालेल. सगळे पण्य खर्च केले की खडाच आहे, काहीही जवळ नसले तरीही खडा जरूर आहे. आर्यला जरा बरे वाटले. एक काहीतरी धीर आला, पण खड्यात काहीही मिळवा तेच उरते. समजा काहीतरी भांडी दूध आहे तेवढे सर्व दिले तर खडा उरेल. पण कमी दिले तर काहीतरी उरेल, ह्याचाच अर्थ संख्येतून तीच संख्या काढली की आला खडा. वा, आज आर्य खुशीत होता, रीळ उलगडायला लागले. पुरूने विचारले, ''काय आर्य? आज खुशीत'', आर्य उत्तरला, ''मग खडा मिळाला न!''



आता डोक्यात रीळ फिरू लागायची पुरूची पाळी होती. आर्यचे असे कसे काय झाले, काहीही बोलतो, खडा आहे म्हणून खूष होतो काय न काय. पुरू भंजाळला.

आर्यला दोन गोष्टी लक्षात आल्या होत्या. एखादी संख्या घेतली, तीत 'खडा' मिळवला तरी तीच संख्या मिळते आणि कोणत्याही संख्येतून 'खडा' काढून घेतला, वजा केला, तरी तीच संख्या मिळते. काही दिवस विचार करून आपले म्हणणे पुरू आणि इतरांना सांगितले. थोडेसे पुरू आणि इतर मित्रांना पटते आहे असे दिसताच, त्याने गुरूजींना आपले म्हणणे सांगितले. गुरूजींना, गणक मुनींना ही खडा घेऊन गणित करण्याची कल्पना खूप आवडली. त्यामुळे अंकांची समज वाढेल तसेच एक वेगळेच काही तरी चांगले घडेल असे त्यांना नक्की समजले कारण त्यांना गणितात रस होता. आर्यला पडलेला प्रश्न त्यांनाही पडला होता. त्यांनी इतर अनेक विद्वानांशी चर्चा केली आणि ह्या त्या वेळी काल्पनिक वाटणाऱ्या आकड्याला शून्य असे सार्थ नाव दिले. आणि शून्याचा जन्म झाला!

भीमला शून्याची कल्पना कळली, आता तो म्हणू लागला मी सुद्धा आत्ता पासून आर्य दादा सारखाच अभ्यास करीन.

■■

लेखक : **किरण बर्वे**, मो. – ९४२३० १२०३४

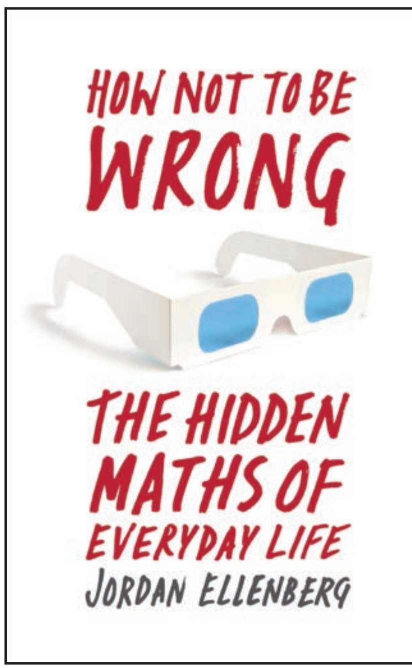
लॉटरीचे महाभारत

लेखक : प्रियदर्शिनी कर्वे

शैक्षणिक संदर्भचा हा अंक गणित विशेषांक असल्यामुळे मी इंटरनेटवर गणिताशी संबंधित काय यू ट्यूब व्हिडियो आहेत ही शोधाशोध सुरू केली. अर्थातच गणिताचा तास घेणारे अनेक व्हिडिओ सापडलेच. शिवाय मनातल्या मनात कितीही आकडेमोड कशी करायची, वगैरे गणिती युक्त्या दाखवणारेही बरेच व्हिडिओ दिसले. गणिताच्या आणि गणिती संकल्पनांच्या इतिहासावर आधारित अनेक सुंदर माहितीपटही लोकांनी इंटरनेटवर उपलब्ध करून दिले आहेत. पण या साऱ्या पसाऱ्यात अचानक माझी नजर एका व्हिडिओच्या शीर्षकावर पडली: हाऊ नॉट टू बी रॉंग : द पॉवर ऑफ मॅथमॅटिकल थिंकिंग.

आपल्याकडून कधीही काही चूक होऊ नये असे सर्वांनाच वाटत असते. गणिती पध्दतीने विचार करायची सवय अंगी बाळगली, तर आपण कधीही चुकणार नाही, असा काहीसा संदेश हे शीर्षक देत होते. त्यामुळे उत्सुक होऊन मी हा ४८ मिनिटांचा व्हिडिओ पाहिला.

द रॉयल इन्स्टिट्यूशन या लंडनमधील नामांकित संस्थेमार्फत अमेरिकेतील विस्कॉन्सिन विद्यापीठातील प्राध्यापक जॉर्डन एलनबर्ग यांना व्याख्यानासाठी आमंत्रित केलेले होते. त्या व्याख्यानाची ही ध्वनीचित्रफीत आहे. एलनबर्ग हे केवळ



प्राध्यापकच नाहीत, तर ते एका स्थानिक नियतकालिकात ‘डू द मॅथ’ या नावाने सामान्य वाचकांसाठी गणितावर आधारित स्तंभही लिहितात, आणि त्यांचे ‘हाऊ नॉट टू बी राँग: द हिडन मॅथमॅटिक्स ऑफ एव्हरीडे लाईफ’’ हे पुस्तकही आता प्रसिध्द झालेले आहे. हे व्याख्यान त्यांनी जून २०१५ मध्ये दिले आहे, आणि त्यावेळी त्यांचे पुस्तक प्रसिध्दीच्या उंबरठ्यावर होते. या पुस्तकातीलच काही भागावर त्यांचे व्याख्यान आधारित आहे. यू ट्यूब व्हिडिओची लिंक आहे https://www.youtube.com/watch?v=kZTKuMBJP7Y

या व्याख्यानात एलनबर्ग यांनी कोणतेही धीरगंभीर सैध्दांतिक विवेचन वगैरे केलेले नाही, तर गणिती विचार करणे म्हणजे काय, याची झलक दाखवणारे दोन किस्से सांगितले आहेत.

पहिला किस्सा छोटासाच आहे, पण त्यामुळेच मी हे व्याख्यान पूर्ण ऐकायला उद्युक्त झाले. दुसऱ्या महायुध्दाच्या काळात अमेरिकेतील लष्करी अधिकाऱ्यांनी एका गणितातील तज्ञाकडे एक मदत मागितली. जर्मनीवर बाँबफेक करून जी अमेरिकन विमाने परत येत होती, त्या विमानांवरील बंदुकीच्या गोळ्यांच्या निशाणांच्या जागा पाहून काही गणिती सूत्राने कोणत्या भागात जास्त गोळ्या लागण्याची शक्यता आहे, हे काढता येईल का, हा लष्करी अधिकाऱ्याचा प्रश्न होता. विमानाला पूर्ण संरक्षक कवच चढवले, तर विमान उडणारच नाही इतके जड होईल, तेव्हा नाजूक भाग कोणता हे समजून घेतले, तर तेवढ्याच भागाला संरक्षण देता येईल, असा विचार ह्या प्रश्नामागे होता. गणिती तज्ञाने या लष्करी अधिकाऱ्यांना काय उत्तर दिले असेल, असे तुम्हाला वाटते? तुम्ही व्हिडिओ पहाल तेव्हा तुम्हालाही हे उत्तर समजेल!

जवळजवळ ४७-४८ मिनिटांच्या व्याख्यानातील ३५-४० मिनिटे एलनबर्ग यांनी दुसरा किस्सा सांगण्यासाठी वापरली आहेत. अमेरिकेतील एका राज्याच्या लॉटरीमध्ये बरेच महिने जॅकपॉटचे (सगळे आकडे जसेच्या तसे बरोबर येण्यासाठी असलेले) बक्षिस कुणालाच लागले नाही. त्यामुळे लॉटरीची लोकप्रियता कमी होऊ लागली. जॅकपॉटची शक्यता खूप कमी असते हे सर्वांनाच माहीत असते, पण दुसऱ्यांना जॅकपॉट लागतो आहे, तर आपल्यालाही कधीतरी तो लागेल, या आशेवर लोक तिकिटे घेत रहातात. पण

बरेच आठवडे जॅकपॉटशिवाय गेले, की या लॉटरीत मोठे बक्षीस लागतच नाही, अशी भावना होऊ लागते. त्यामुळे लॉटरी कार्यालयाने एक नवीन नियम बनवला – ज्या आठवड्यात जॅकपॉटचे बक्षीस द्यावे लागणार नसेल, त्या आठवड्यात जॅकपॉटची रक्कम खालच्या बक्षीसांच्या रकमेत अतिरिक्त म्हणून विभागून दिली जाईल. यामुळे अपेक्षित परिणाम साध्य झाला. लॉटरीची लोकप्रियता पुन्हा वाढली. पण ही तर गोष्टीची फक्त सुरूवात आहे. या नव्या नियमामुळे लॉटरीत वेगवेगळी बक्षिसे जिंकण्याच्या शक्यतांमध्ये काही बदल झाले. या बदलांचा गणिती परिणाम काय झाला, आणि व्यवहारात त्याचे पडसाद कसे उमटले, आणि काही लोकांनी या लॉटरीतून केवळ गणिताच्या आधाराने कायदेशीर मार्गाने कित्येक वर्षे लक्षावधी डॉलर्स कसे कमावले, याचे सारे महाभारत ऐकून माझी तर मतीच गुंग झाली ! आता आपल्याकडे असा नियम असलेली एखादी लॉटरी सुरू आहे किंवा कसे, याची चाचपणी मी करते आहे !

■■

लेखक : **प्रियदर्शिनी कर्वे,**
समुचित एन्व्हायरोटेक संस्थेच्या संस्थापक संचालक.
priyadarshini.karve@gmail.com

१०० शब्द... ABCD शिवाय...

ही गोष्ट आहे तामिळनाडू राज्याचे मुख्यमंत्री सी.अण्णादुराई यांची. ते त्यांच्या इंग्रजी व तामीळमधील नैपुण्यासाठी प्रसिद्ध होते. तशी ही गोष्ट फार गणिताशी संबंधित नाहीये पण त्यामध्ये आकड्यांचा समावेश आहे.

१९६८ साली सी. अण्णादुराई परदेशवारीसाठी येल विद्यापीठात गेले होते.तिथे त्यांना विद्यार्थ्यांशी बोलण्याची विनंती करण्यात आली. विद्यार्थ्यांशी चालू असलेल्या परस्पर संभाषणामध्ये मुलांना इंग्रजी नैपुण्यता जाणण्यासाठी कोडे घालण्याची मुभा होती.

वर्गातील एक मुलगा उभा राहीला व त्याने त्यांना इंग्रजीमधील १०० शब्द ज्यांच्यामध्ये A, B, C, D ही अक्षरे येत नाहीत असे सांगायला सांगितले. अण्णादुराई यांनी ताबडतोब एका पाठोपाठ एक शब्द सांगायला सुरुवात केली. ते शब्द होते, one, two, three ते ninety nine पर्यंत!

वर्गातले सगळे चकित झाले होते आणि त्यांच्या शंभराव्या शब्दासाठी थांबले होते.जर का ते म्हणाले असते “Hundred” तर ते हरले असते. पण ninety nine नंतर ते म्हणाले, “Stop”. संपूर्ण वर्गाने टाळ्यांचा कडकडाट केला.

एक मूर्ख चूक

शाळेच्या सुरुवातीच्या वर्षांत आपण अपूर्णांकाचे संक्षिप्त रूप करायला शिकलो. ही क्रिया करण्याच्या काही विशिष्ट पद्धती आहेत. एका हुशार मुलाने अपूर्णांकाचे संक्षिप्त रूप करण्याची एक छोटी पद्धत शोधून काढली पण ती योग्य आहे का?

त्याने काय केले बघा -

$$\frac{२\cancel{६}}{\cancel{६}५} = \frac{२}{५}$$

यात याने ६ खोडले आणि अचूक उत्तर मिळवले पण ही पद्धत योग्य आहे का? इतर अपूर्णांकालाही ती लागू पडते का? आणि जर ती योग्य असेल तर आपल्या शिक्षकांनी ही सोपी पद्धत सोडून इतकी क्लिष्ट पद्धत आपल्याला का शिकवली असेल? इथे काय केले आहे बघू आणि इतर अपूर्णांकाना ही पद्धत वापरता येते का बघू.

ई. ए. मॅक्सवेल यांनी त्यांच्या इन मॅथेमॅटिक्स (विद्यापीठ प्रेस, १९५९) या पुस्तकात ही आकडे रद्द करण्याची क्रिया म्हणजे मूर्ख चूक असल्याचे म्हटले आहे.

१. $\frac{१\cancel{६}}{\cancel{६}४} = \frac{१}{४}$

२. $\frac{२\cancel{६}}{\cancel{६}५} = \frac{२}{५}$

असे करून जर कोणी उत्तर मिळवत असेल तर तो तुम्हाला मूर्ख बनवत आहे, हे नक्की. रद्द करण्याची आणखी काही उदाहरणे पाहू.

१. $\frac{१\cancel{९}}{\cancel{९}५} = \frac{१}{५}$

२. $\frac{४\cancel{९}}{\cancel{९}८} = \frac{४}{८} = \frac{१}{२}$

इथे आपण चक्रावून जातो. असे कसे होऊ शकते?

आणि कोणकोणत्या अपूर्णाकांसाठी ही पद्धत योग्य आहे? हे सिद्ध करता येईल का? असे प्रश्न आपल्याला पडतात. आपण सिद्ध करायचा प्रयत्न करू. ज्यांना प्राथमिक बीजगणिताचे ज्ञान आहे त्यांना आपण ही प्रक्रिया समजावू शकतो.

एक उदाहरण घेऊ –

$$\frac{10\,x + a}{10\,a + y}$$

इथे आपण हे समीकरण बारकाईने पाहायला हवे. यातील x, y आणि a हे पूर्णांक असायला पाहिजेत, कारण अपूर्णांकाच्या अंश आणि छेदात हे अंक आहेत.

$$\frac{10\,x + a}{10\,a + y} = \frac{x}{y}$$

आता आपल्याला a आणि x च्या किमती काढायला हव्यात, जेणेकरून y ची किंमत काढता येईल.

$$y(10x + a) = x(10a + y)$$

$$10xy + ay = 10ax + xy$$

$$9xy + ay = 10\,ax$$

$$y(9x + a) = 10\,ax$$

$$y = \frac{10\,ax}{9\,x + a}$$

मोठ्या प्रमाणावर आकडेमोड टाळायची असेल तर आपल्याला एक तक्ता करायला पाहिजे. लक्षात ठेवा x, y आणि a हे एक अंकी पूर्णांकच असले पाहिजेत. (तक्ता)

तक्त्यातील छायांकित भाग हा y च्या चार पूर्णांक किंमती दाखवतो. त्यातील दोन किंमती अश्या जेव्हा $x = 1$, $a = 6$ तेव्हा $y = 4$

जेव्हा $x = 2$, $a = 6$

तेव्हा $y = 5$ या किंमतींनी आपल्याला

$$\frac{१\cancel{६}}{\cancel{६}४} \text{ आणि } \frac{२\cancel{६}}{\cancel{६}५}$$

हे अपूर्णांक मिळतील तसेच जेव्हा

x\a	1	2	3	4	5	6	...	9
1		$\frac{20}{11}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{50}{14}$	$\frac{60}{15} = 4$		$\frac{90}{18} = 5$
2	$\frac{20}{19}$		$\frac{60}{21}$	$\frac{80}{22}$	$\frac{100}{23}$	$\frac{120}{24} = 5$		
3	$\frac{30}{28}$	$\frac{60}{29}$		$\frac{120}{31}$	$\frac{150}{32}$	$\frac{180}{33}$		
4								$\frac{360}{45} = 8$
⋮								
9								

$x = 1$, $a = 9$ असेल तेव्हा $y = 5$ आणि $x = 4$, $a = 9$ तेव्हा $y = 8$ असेल यावरून आपण वर बघितलेल्या उदाहरणाची सिद्धता पटते पण फक्त याच चार अपूर्णांकासाठी ही सिद्धता लागू पडते. हे झाले दोन अंकी अपुर्णाकासाठी पण दोन पेक्षा जास्त अंकी संख्येच्या अपूर्णांकाला हा नियम लागू पडतो का?

$$\frac{4\cancel{8}\cancel{4}}{\cancel{8}\cancel{4}7} = \frac{4}{7} \qquad \frac{\cancel{5}\cancel{4}5}{6\cancel{5}\cancel{4}} = \frac{5}{6} \qquad \frac{\cancel{4}\cancel{2}4}{7\cancel{4}\cancel{2}} = \frac{4}{7} \qquad \frac{24\cancel{9}}{\cancel{9}96} = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{4\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}}{\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}7} = \frac{4}{7} \qquad \frac{\cancel{5}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{4}5}{6\cancel{5}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{4}} = \frac{5}{6} \qquad \frac{\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{2}4}{7\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{2}} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}3}{4\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}} = \frac{3}{4} \qquad \frac{\cancel{6}\cancel{4}\cancel{8}6}{8\cancel{6}\cancel{4}\cancel{8}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{14\cancel{7}\cancel{1}\cancel{4}}{\cancel{7}\cancel{1}\cancel{4}68} = \frac{14}{68} = \frac{7}{34} \qquad \frac{\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{0}\cancel{4}8}{9\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{0}\cancel{4}} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{1\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}}{\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}3} = \frac{1}{3} \qquad \frac{2\cancel{8}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{4}\cancel{2}}{\cancel{8}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{4}\cancel{2}6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad \frac{3\cancel{4}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{3}\cancel{8}}{\cancel{4}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{5}\cancel{3}\cancel{8}4} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\cancel{7}\cancel{6}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{8}7}{8\cancel{7}\cancel{6}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{8}} = \frac{7}{8} \qquad \frac{\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}3}{4\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{\cancel{1}\cancel{0}\cancel{2}\cancel{5}\cancel{6}\cancel{4}1}{4\cancel{1}\cancel{0}\cancel{2}\cancel{5}\cancel{6}\cancel{4}} = \frac{1}{4} \qquad \frac{\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}3}{4\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{4}} = \frac{3}{4} \qquad \frac{4\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}}{\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}5} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{4\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}}{\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}7} = \frac{4}{7} \qquad \frac{5\cancel{9}\cancel{5}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{8}\cancel{0}}{\cancel{9}\cancel{5}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{8}\cancel{0}8} = \frac{5}{8} \qquad \frac{\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}4}{6\cancel{4}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{1}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\cancel{5}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{4}5}{6\cancel{5}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{5}\cancel{4}} = \frac{5}{6} \qquad \frac{6\cancel{9}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{6}}{\cancel{9}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{6}8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad \frac{\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{2}4}{7\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{2}} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{\cancel{5}\cancel{3}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{6}\cancel{1}5}{7\cancel{5}\cancel{3}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{6}\cancel{1}} = \frac{5}{7} \qquad \frac{\cancel{2}\cancel{0}\cancel{5}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{8}2}{8\cancel{2}\cancel{0}\cancel{5}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{8}} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad \frac{\cancel{3}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{8}3}{8\cancel{3}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{8}} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{\cancel{6}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{8}6}{8\cancel{6}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{8}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad \frac{4\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}}{\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}7} = \frac{4}{7}$$

खालील काही उदाहरणांवरून हे समजेल.

काही उत्साही वाचक मूळच्या मूर्ख चुकांच्या विस्तारित रूपाचे समर्थन करतीलही पण असे अंक खोडून अपूर्णांक संक्षिप्त करणे खरोखरीच योग्य नाही. तरीही त्यांना असे गमतीशीर अपूर्णांक शोधायचे असतील तर त्यांनी खालील अपुर्णांकांचा विचार करावा. त्यांनी ही अंक खोडून रद्द करण्याची क्रिया नियमाला धरून सिद्ध करून दाखवावी.

$$\frac{3\cancel{3}2}{8\cancel{3}0} = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{3\cancel{8}5}{8\cancel{8}0} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$$
$$\frac{1\cancel{3}8}{\cancel{3}45} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$
$$\frac{2\cancel{7}5}{7\cancel{7}0} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$$
$$\frac{1\cancel{6}\cancel{3}}{\cancel{3}2\cancel{6}} = \frac{1}{2}$$

गणितीय उपयुक्तते खेरीज ही पद्धत काही महत्त्वाच्या विषयांमध्ये हेतूपुरस्सर वापरली जाते. यातून प्राथमिक बीजगणितात अंक सिद्धांत कसे वापरता येतात हे समजते पण एकूणच ही पद्धत मनोरंजनासाठी आणि अंकांचे खेळ करण्यासाठी आहे हे लक्षात घ्यावे. गणितात अशा अनेक गमतीजमती दडल्या आहेत.

अनुवाद: **जयंती साने**

फसवी आकडेवारी

एक कॉलेजमधला विद्यार्थी त्याच्या आजोबांसोबत गप्पा मारत बसला होता.

‘कसला अभ्यास करतो आहेस?’ आजोबांनी विचारलं.

‘गणिताचा’ नातू म्हणाला. ‘गणितज्ञ व्हायचं आहे.’ तो म्हणाला. ‘हे एक अचूक शास्त्र आहे आणि आकडेवारी कधीच खोटी नसते.’

आजोबांनी त्याला विचारलं, ‘जर एक माणूस एक गॅरेज १२ दिवसांत बांधून काढू शकतो, तर मला सांग किती माणसं मिळून ते एक दिवसात बांधू शकतात?’

नातू म्हणाला, ‘१२’

आजोबा म्हणाले, ‘बरोबर !’

तर मग २८८ माणसं ते गॅरेज एका तासात बांधू शकतात आणि १७,२८० माणसं एक मिनिटात आणि १०,३६,८०० माणसं ते गॅरेज फक्त एका सेकंदात बांधू शकतात?

हे ऐकून नातू अवाक झाला.

गणितातील खेळ

लेखक : नागेश शंकर मोने

गणितातील खेळ म्हटले की थोडं दचकायला होतं. गणित आणि खेळखंडोबा याची सवय अनेकांना असते पण गणित आणि खेळ म्हटलं की अनेकांना कसंतरी वाटतं. निरनिराळ्या खेळांत वापरल्या जाणाऱ्या गणिताबद्दल या लेखात काहीही नाहीये तर गणितातील अंक / संख्या, आकृती, गुणधर्म याबद्दल थोडीफार 'मजा' इंथ आहे.

पुन्हा पुन्हा एक एक

१९३० सालापासून हा खेळ प्रसिद्ध आहे. विशिष्ट कृती केल्यावर शेवटी एकच कसा येतो हे अद्याप लक्षात आलं नाहीये !

खेळ खेळण्याचे दोन नियम आहेत. (१) संख्या विषम असली की त्या संख्येच्या तीनपटीत १ मिळवायचा आणि संख्या सम असली की (२) ती निम्मी करायची.

समजा संख्या घेतली २४. संख्या सम आहे. मग नियम (२) नुसार तिची निम्मी करूया. उत्तर येईल १२. संख्या पुन्हा सम आली मग नियम (२) पुन्हा वापरूया. उत्तर येणार ६. पुन्हा नियम (२) नुसार उत्तर येणार ३. आता मात्र संख्या विषम आली. मग नियम (१) वापरूया. उत्तर येणार १०. ही संख्या सम आहे. उत्तर येणार नियम (२) नुसार ५. ही संख्या मात्र विषम संख्या आहे. मग उत्तर येणार १६ (कारण नियम (१)). १६ समसंख्या म्हणून निम्मे ८. ८ च्या निम्मे ४. ४ च्या निम्मे २ आणि २ च्या निम्मे १.

विशेष म्हणजे संख्या सम असू द्या अथवा विषम. शेवटी ४ – २ – १ येतातच!

असं का घडतं हे अद्याप कळालं नाहीये. बुद्धिमानातील बुद्धिमान गणिती याचा शोध घेताहेत पण व्यर्थ ! तेव्हा तुम्ही शोधायला लागल्यावर निराश होऊ नका !

कापरेकर स्थिरांक ६१७४

नाशिकजवळच्या देवळाली गावात माध्यमिक शाळेत शिकविणाऱ्या दत्तात्रय

रामचंद्र कापरेकर यांनी शोधलेली ही संख्या आहे. कोणतीही ५ अंकी संख्या घ्या. (अट एकच, चारही अंक समान नकोत !) आणि त्यातील अंक उतरत्या क्रमाने लिहा व एक संख्या मिळवा. मूळच्या संख्येतील अंक चढत्या क्रमाने लिहा व दुसरी संख्या मिळवा. या दोन्ही संख्यांतील फरक काढा. उत्तर ६१७४ आले का पहा. न आल्यास पुन्हा वरीलप्रमाणे कृती करा. एका पायरीत (जास्तीत जास्त ८चा) ६१७४ येतातच.

उदाहरण घेऊया. ९५७४.

यातील अंकांपासून तयार होणारी मोठ्या मोठी संख्या ९७५४. लहानात लहान संख्या ४५७९. यातील फरक ९७५४–४५७९ = ५१७५.

पुन्हा हीच कृती करूया. संख्या असतील ७५५१ आणि १५५७. फरक काढूया. तो येतो ५९९४. पुन्हा हीच कृती ९९५४ – ५४९९ = ४४५५. पुन्हा तीच कृती ५५४४ – ४४५५ = १०८९. पुन्हा हीच कृती ९८१० – ०१८९ = ९६२१. पुन्हा तीच कृती ९६२१ – १२६९ = ८३५२. पुन्हा तीच कृती ८५३२ – २३५८ = ६१७४.

आले ६१७४. पायऱ्या मोजा. ७ व्या पायरीत उत्तर आले. विशेष म्हणजे वरील कृती केल्यावर ६१७४ मिळत नाही अशी चार अंकी संख्या अद्याप सापडलेली नाही. चार अंकी संख्येबद्दल ६१७४ असा स्थिरांक आहे तसा स्थिरांक तीन अंकी संख्येबद्दलही आहे. किती अंकी संख्येबद्दल कोणता स्थिरांक सापडत याचेही सूत्र आहे.

कापेकरांचा हा स्थिरांक जगात फार गाजला आहे. या स्थिरांकाशी निगडीत आणखी एक बाब आहे. उदारणाने पाहूया. ९५३३ ही संख्या घ्या ९ आणि ५ मध्ये ४ चा फरक आहे. ५ आणि ३ मध्ये २ चा फरक आहे तर ३ आणि ३ मध्ये शून्याचा फरक आहे. म्हणजे फरक ४ – २ – ० असा आहे. कापरेकर गमतीने म्हणावयाचे ४२० चा फरक ! विशेष म्हणजे मूळ संख्येच्या (इथे ९५३३) उलट संख्या (इथे ३३५९) घेतली व वजाबाकी केली की पहिल्याच पायरीत ६१७४ येतात!

निरनिराळ्या गणित अधिवेशनात लोक कापरेकरांना हे सांगायला भाग पाडीत !

क्रमगुणितांचे चक्र

क्रमगुणित म्हणजे काय ते उदहरणाने पाहूया. ३ क्रमगुणित म्हणजे १ x २ x ३ = ६. क्रमगुणित म्हणजे १ x २ x ३ x ४ = २४. ३ क्रमगुणित हे ३ ! लिहितात. म्हणजे ३ ! = ६, ४ ! = २४, ५ ! = १२०, ६ ! = ७२०, आता n ! = १ x २ x ३ x ... x (n-1) x n. क्रमगुणिताच्या चक्राची मौज पाहूया.

- १४५ या संख्येतील अंकांची क्रमणुणिते घ्या व त्यांची बेरीज करा.

  १! = १, ४! = २४, ५! = १२०,

आणि १+ २४ + १२० = १४५ येतात !

- ४०,५८४ या संख्येबद्दल पाहूया.
  ४! + ०! + ५! + ८! ५! = २४ + ० + १२० + ४०, ३२० + १२० = ४०,५८४

विशेष म्हणजे पहिल्याच पायरीत मूळची संख्या मिळणाऱ्या या दोनच संख्या आहेत (१४५ आणि ४०५८४). अर्थात १ आणि २ या एक अंकी संख्या आहेत पण त्या किरकोळच.

दोन चक्रात पुन्हा तीच संख्या मिळणाऱ्या दोन संख्या आहेत ८७१ आणि ८७२.

८७१ साठी करून पाहूया.

८! + ७! + १! = ४०३२० + ५०४० + १ = ४५३६१

४५३६१ = ४! + ५! + ३! + ६! + १! = २४ + १२० + ६ + ७२० + १ = ८७१

८७२ साठी तुम्ही करून पहा.

– १६९ ही संख्या तीन चक्रात पुन्हा १६९ हीच संख्या प्रदान करते. करून पहा.

विशेष म्हणजे २० लाख संख्यांपर्यंतच्या संख्यांबाबत वरील गुणधर्माची खात्री संगणकाच्या साहाय्याने केली आहे तर वर नमूद केलेल्या संख्यांखेरीज दुसरी कुठलीही संख्या सापडली नाहीये. तेव्हा वरील संख्यांवरच समाधान माना ! दुधाची तहान ताकावर !

संदर्भ : Math Charmers, Tantalizing Tidbits for the Mind, by Alfred Posanentier.

लेखक : **नागेश शंकर मोने**, पुणे

आकड्यांचा लोकप्रिय खेळ – सुडोकु

				6			3	
2	4					1		
		7			2			8
		1	4			3		9
7			3	1	9			2
3		6			7	5		
5			7			8		
		2					1	3
	7			2				

१०० वर्षांपूर्वी

मेक्सिको आणि व्हेनिस

व्हेनिस हे युरोपातील एक ऐतिहासिक महत्वाचे आणि सुंदर इमारतींनी नटलेले शहर आहे.पण त्याचे सगळ्यात महत्त्वाचे वैशिष्ट्य म्हणजे व्हेनिस शहरातून वहाणारे कालवे. हे शहर जवळजवळ पाण्यावरच वसलेले आहे आणि कालव्यांचा दळणवळणासाठी वापर होतो.

जुलै १९१६ च्या नॅशनल जिओग्राफिकमधील एक लेख मेक्सिको देशातील व्हेनिससदृश अशा एका सुंदर भागाचे वर्णन करतो. या लेखात म्हटल्याप्रमाणे १६ व्या शतकातील एका प्रवाशाने असे लिहिले होते की मेक्सिको शहर हे दुसरे व्हेनिसच आहे. पण शहराच्या वाढीसाठी जमीन निर्माण करत गेल्यामुळे मेक्सिको शहरातले सारे कालवे काळाच्या ओघात आटून गेले.

मेक्सिको शहरात शिल्लक असलेल्या मुख्य कालव्याचा फोटो आहे पहिल्या चित्रात. एरवी बकाल असलेला हा कालवा फक्त वार्षिक पुष्प महोत्सवाच्या वेळी कात टाकतो आणि सुशोभित होतो.

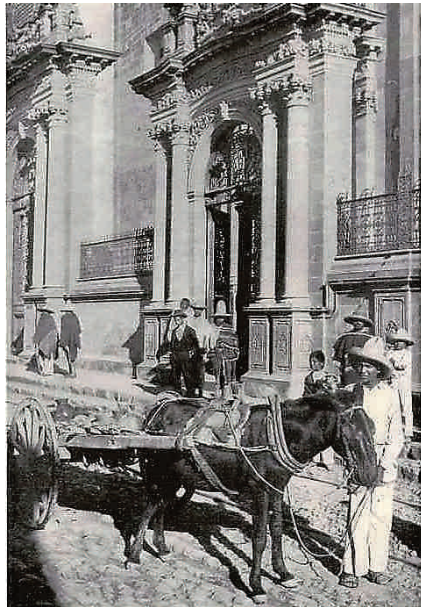
दारात पाणी घेऊन येणाऱ्या कालव्यांवर वसाहतीसाठी पाणी सोडल्यावर मेक्सिको शहरात घोडागाड्यांतून पाणीपुरवठा करण्याची वेळ आली. दुसऱ्या चित्रात आहे, अशाच एका पाण्याच्या गाडीचे छायाचित्र.

लक्षात असू द्या हा लेख शंभर वर्षांपूर्वीचा आहे. तेव्हा सध्या परिस्थिती काय आहे, कोणास ठाऊक ! पण ही दृश्ये आणि वर्णने

मेक्सिको शहरातील कालवा

भारतातल्या बऱ्याच शहरांतील आजच्या स्थितीची आठवण नक्कीच करून देतात.

नॅशनल जिओग्राफिकमधील या लेखातील वर्णनानुसार मेक्सिको शहरातल्या एका जुन्या कालव्याच्या जागी आता असलेल्या रस्त्याने आपण तीन तळ्यांच्या सान्निध्यात अजूनही पाण्यावरचे आपले अस्तित्व टिकवून असलेल्या अझटेक व्हेनिसमध्ये जाऊन पोहोचतो. या परिसरात रहाणाऱ्या अझटेक लोकांनी या तळ्यांमधून शेतीसाठी कालवे काढलेलेच होते, पण नंतरच्या युरोपीय वसाहतकरांनी तळ्यांना येणाऱ्या पुरांपासून संरक्षणासाठी ही तिन्ही तळी कालव्यांच्या सहाय्याने जोडून पाण्याला खोऱ्याबाहेर जाण्यासाठी डोंगरातून बोगदा करून वाट करून दिली आहे. दुसऱ्या चित्रात या कालव्यांचा दळणवळणासाठी वापर करणारे स्थानिक रहिवासी दिसत आहेत.



मेक्सिको शहरातील पाण्याची गाडी

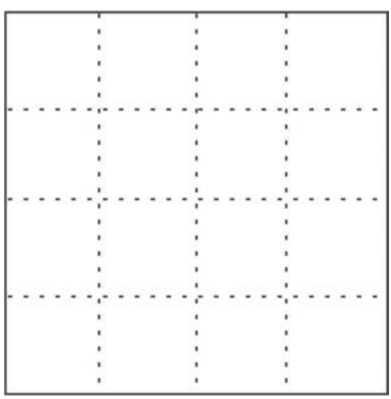
व्हेनिसमधील गोंडोलामधून चालणाऱ्या कालव्यातून वहातुकीचा हा आहे, दक्षिण अमेरिकी अविष्कार !

कालव्यातून बोटीत बसून निघालेले स्थानिक रहिवासी

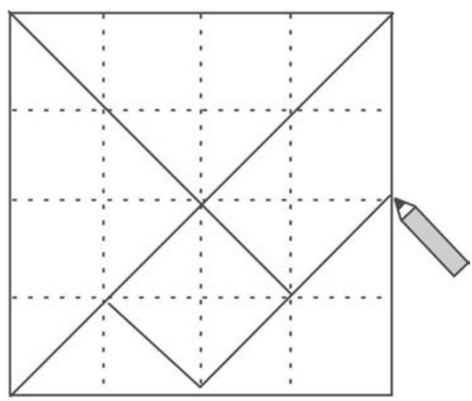
टॅनग्रॅम

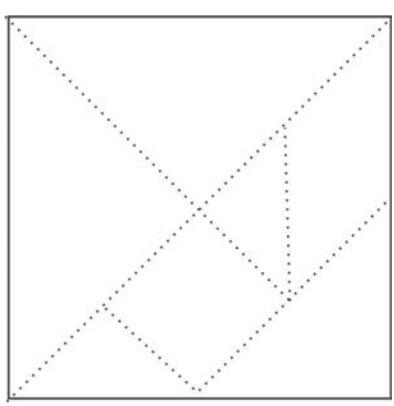
टॅनग्रॅम हे चीन देशाचे, जवळ जवळ एक हजार वर्षापूर्वीचे कोडे आहे. ह्यामध्ये एका चौरसाचे, विशिष्ट प्रकाराने सात तुकडे केले जातात. नंतर ते सात तुकडे जोडून भूमितीच्या आकृती, मनुष्याकृती, पक्षी, प्राणी, इत्यादी अनेक निरनिराळ्या रचना बनविल्या जातात. प्रत्येक नमुन्यात टॅनग्रॅमच्या सातही तुकड्यांचा उपयोग करणे, अनिवार्य आहे. तुम्ही टॅनग्रॅमपासून हजारो वेगवेगळ्या रचना करू शकता.

१. पुठ्ठ्याचा १० सेंमी बाजू असलेला एक चौरस घ्या. त्यामध्ये १६ छोटे चौरस आखून घ्या.



२. चित्रात दाखविल्याप्रमाणे रेषा आखून घ्या.





३. रेषांवरून कापा. तुम्हाला टॅनग्रॅमचे सात तुकडे मिळतील.

टॅनग्रॅमचे गाणे

चौरसाकृती घेऊन कागद, तुकडे करूया सात
सुंदर सुंदर चित्रे बनवूया, रचना हातोहात ।।१।।

सारे भागही वापरण्याचे, बंधन ठेवा ध्यानी
खेळ संपता, तुकडे सारे, ठेवा सांभाळूनी ।।२।।

प्राणी, पक्षी, बाणही होतो, बनते अर्धी कमान
परिमिती जरी वेगवेगळी, क्षेत्रफळे मात्र समान ।।३।।

अगणित चित्रे तयार होती, मोजू न शकला कोणी
ज्ञान मिळविण्या साधन आहे कृती, गोष्टी अन् गाणी ।।४।।

खेळ जुना अर्थपूर्ण हा, मौजही भारी येते
कळे गुणधर्म लढते 'डोके', गणितमैत्री जुळते ।।५।।

अनाकलनीय संख्या - २२

खाली दिलेली माहिती सर्वात प्रथम तुम्हाला चकित करेल आणि नंतर विचार करायला लावेल की उत्तर असे का आले? अंकगणिताची उपयुक्तता दाखवण्याची ही एक उत्तम संधी आहे, कारण अंकगणितच तुमचे कुतूहल शमवू शकते.

पुढे दिलेले उदाहरण वाचण्याआधी तुम्ही खालील दिलेल्या सूचनांवर लक्ष केंद्रित करा.

सर्व अंक वेगवेगळे असतील अशी कोणतीही तीन अंकी संख्या घ्या. या तीन अंकांपासून तयार होणाऱ्या सर्व दोन अंकी संख्या लिहा. त्यानंतर या सर्व दोन अंकी संख्यांच्या बेरजेला मूळ तीन अंकी संख्येतील आकड्यांच्या बेरजेने भागा.

सर्वांचे उत्तर एकच आले पाहिजे, २२.

उदाहरणार्थ ३६५ ही तीन अंकी संख्या घेऊ या. यामधील तीन अंकांपासून तयार होणाऱ्या सर्व दोन अंकी संख्यांची बेरीज करू.

३६ + ३५ + ६३ + ६५ + ५३ + ५६ = ३०८.

मूळ संख्येमधील तीन अंकांची बेरीज आहे, ३ + ६ + ५ = १४.

आता,

$$\frac{३०८}{१४} = २२$$

महत्त्वाकांक्षी वाचकांसाठी आपण या उत्तराचे विश्लेषण करू या. सुरुवात करू खाली दिलेल्या एका प्रातिनिधिक संख्येपासून: $१००x + १०y + z$

आता आपण या तीन अंकांपासून तयार होणाऱ्या सर्व दोन अंकी संख्यांची बेरीज करू.

$$(१०x + y) + (१०y + x) + (१०x + z) + (१०z + x) + (१०y + z) + (१०z + y)$$

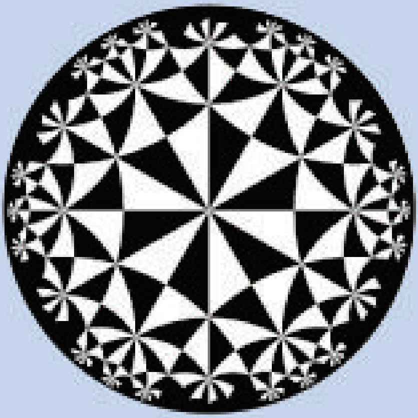
$$= २२x + २२y + २२z$$

$$= २२ (x + y + z)$$

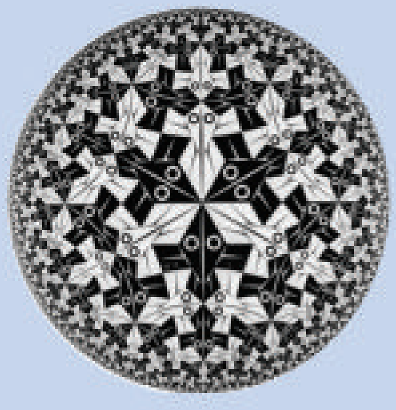
या बेरजेला जेव्हा आपण तीन अंकांच्या बेरजेने म्हणजेच $(x + y + z)$ ने भागू, उत्तर येते २२!

या गणितानंतर तुम्हाला अंकगणिताबद्दल मनापासून कौतुक वाटेल. हे उदाहरण सोपे बीजगणित समजून घेण्यासाठी आवश्यक असलेल्या अंकगणिताचे महत्त्व अधोरेखित करते आणि त्यामधील सौंदर्यही दर्शवते.

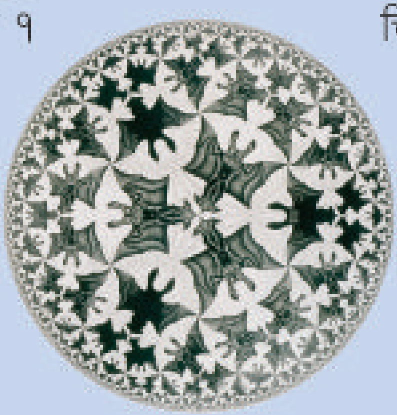
संदर्भचा डाळ विशेषांक (अंक-९९) हा अंक मराठी विज्ञान परिषद, पुणे यांच्या सहकार्यांने काढण्यात आला होता. तसेच त्या अंकातील शब्दकोडे श्री. सुभाष पानसे यांनी दिले होते. हे दोन्ही उल्लेख गेल्या अंकात नजरचुकीने द्यायचे राहिले होते. त्याबद्दल दिलगीर आहोत.



चित्र १



चित्र २



चित्र ३

गणिताला कलात्मक दृश्य स्वरूप देणारा आघाडीचा शिलेदार म्हणून एम. सी. एशर (१८९८–१९७२) यांचे नाव घ्यावे लागेल. १९५८ साली प्रसिध्द झालेल्या एका गणिती शोधनिबंधात एशर यांची दोन चित्रे वापरली गेली, आणि म्हणून लेखक एच. एस. एम. कोक्झेटर यांनी एशरला या शोधनिबंधाची प्रत पाठवली. या निबंधात आणखी एक आकृती होती, जी वर चित्र १ मध्ये दाखवली आहे. या आकृतीवरून प्रेरणा घेऊन एशर यांनी गणितातील अनंत किंवा इनफिनिटी या संकल्पनेचे दृश्य स्वरूप दाखवणारी काही काष्ठशिल्पे बनवली. त्यातील पहिले आणि सर्वात प्रसिध्द चौथे अशा दोन काष्ठशिल्पांची छायाचित्रे अनुक्रमे चित्र २ आणि ३ मध्ये पहायला मिळेल. चित्र ३ मधील काष्ठशिल्पाचे नाव आहे – देवदूत आणि सैतान (एंजल्स ऍंड डेव्हिल्स).

शैक्षणिक संदर्भ: जून-जुलै २०१६, RNI Regn. No. : MAHMAR/1999/3913
मालक, मुद्रक, प्रकाशक पालकनीती परिवार करिता संपादक नीलिमा सहस्रबुद्धे यांनी
अमृता क्लिनिक, संभाजी पूल कोपरा, कर्वे पथ, पुणे ४ येथे प्रकाशित केले.