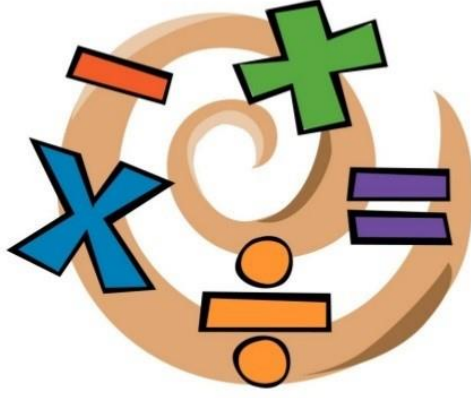


शैक्षणिक संदर्भ अंक १४६ (फेब्रुवारी - मार्च २०२४)

इष्ट कर्म

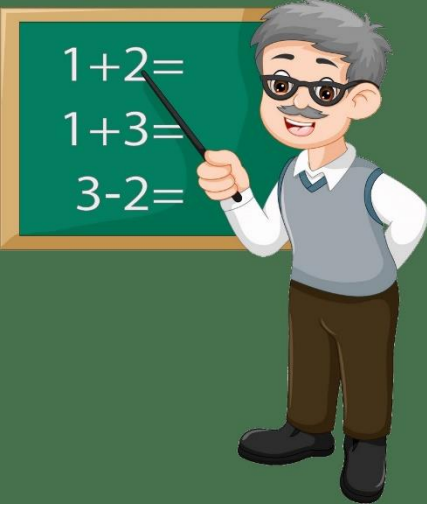
लेखक : किरण बर्वे



इष्ट कर्म

लेखक : किरण बर्वे

नेहमीप्रमाणेच हसतमुखाने शिक्षक वर्गात आले आणि विद्यार्थीदेखील उत्सुकतेने



हळूहळू शांत बसले. शिक्षकांनी सुरुवात केली आणि ते म्हणाले, “आज मी तुम्हाला एखादा प्रॉब्लेम वेगळ्या पद्धतीने कसा सोडवायचा ते सांगतो. ही पद्धत आम्ही आमच्या लहानपणी शिकलो आहोत. मी एका छोट्या गावात राहायचो.” विद्यार्थ्यांना वाटलं आता सर त्यांचं गाव, त्याच्यातला परिसर, त्यांना आलेले अनुभव, असे

सगळे छान सांगतील. पण तसं नव्हतं. आज ते म्हणाले, की मी गोष्ट सांगणार नाहीये. आपण थेट उदाहरण सोडवायला घेऊ.

‘भास्कराचार्य गणित प्रज्ञाशोध’ 2017 च्या प्रश्नपत्रिकेतील हा एक प्रश्न आहे. अब्दुलला कॅथरीनच्या तिप्पट अंतर जायचे आहे आणि ते अंतर विनयने जायच्या अंतराच्या

दुप्पट आहे. कॅथरीनचा वेग अब्दुलच्या वेगाच्या एक तृतीयांश आहे आणि तो विनयच्या वेगापेक्षा अर्धा आहे. जर का ते तिघेही एकाच वेळेला, त्यांना ज्या ठिकाणी जायचे आहे तेथे जायला निघाले तर सगळ्यात अगोदर कोण पोहोचेल?

शिक्षक म्हणाले, “चला, आपल्याला नेहमीच्या म्हणजे चलपद वापरून सोडवायच्या पद्धतीने हे गणित सोडवू. कुठलंही गणित सोडवायच्या आधी ते समजावून घेतलं पाहिजे. केतन आणि नेहा, वाचा बरं हे गणित. शांतपणे वाचा.” शिक्षकांनी प्रश्न विचारले, “नेहा, गणित कशाबद्दल आहे? गणितात काय दिलंय?”

नेहाने सांगितलं, “गणित अब्दुल, कॅथरीन आणि विनय या मुलांसंबंधी आहे. ते वेगवेगळे अंतर चालतात आणि त्यांचे वेग पण वेगवेगळे आहेत.”



शिक्षक म्हणाले, “बरोबर आहे. मात्र अजून काहीतरी दिलंय. केतन, तू सांग बरं.”

केतन म्हणला, “सर त्यांनी नेमकी अंतरे दिलेली नाहीत पण एकमेकांनी जायच्या अंतरांचं प्रमाण दिले आहे.” नेहा म्हणाली, “मलाही कळलंय बरं का! तसंच त्यांचा चालण्याचा किंवा जाण्याच्या वेगाचही प्रमाण दिले आहे.”

“मग तुम्हाला काय आठवलं?”, शिक्षकांनी विचारले. केतन आणि नेहा एकदमच म्हणाले, “अंतर भागिले वेग, बरोबर वेळ. म्हणजे, वेळेसंबंधी काहीतरी विचारलं आहे.”

“बरोबर. वेळेसंबंधी काय विचारलं, की आपापल्या ठिकाणी जाण्यासाठी ही मुले निघाली असताना जिथे जायचे तिथे अगोदर कोण पोहोचेल? म्हणजे कमीतकमी वेळ कोणाला लागेल, असं विचारले आहे.”

“अब्दुलने चाललेले अंतर हे कॅथरीनने चाललेल्या अंतराच्या तिप्पट आहे, मग काय कराल? कॅथरीनने चाललेल्या अंतराला d म्हणा. d ची किंमत आपल्याला माहिती नाही, म्हणून त्याला ‘चल’ म्हटलं. d हे कॅथरीनने चाललेले अंतर, म्हणून अब्दुलने चाललेले अंतर होते $3d$. आणि, अजून काय सांगितलं आहे? विनय अब्दुल चाललेल्या अंतराच्या निम्मे अंतर चालला. अर्थात विनय $3d / 2$ इतके अंतर चालला.

वेगाबद्दल काय दिलंय? वेगाबद्दल म्हटले आहे, की कॅथरीनचा वेग अब्दुलच्या वेगाच्या एक तृतीयांश आहे आणि विनयचा वेग हा कॅथरीनच्या वेगाच्या दुप्पट आहे. मग काय करावं? कॅथरीनचा वेग समजा s आहे. मग, विनयचा वेग झाला $2s$, तर अब्दुलचा वेग झाला $3s$.”

शिक्षक म्हणाले, “इथे तिघेजण जिथे जाणार ते अंतर, तिघांचे वेग, अशी बरीच काय काय माहिती दिली आहे. मग मी तुम्हाला एक युक्ती सांगतो. ती युक्ती म्हणजे, आपण एक सारणी करू म्हणजे एक टेबल करू आणि दिलेली प्रत्येक माहिती त्या टेबलमध्ये लिहून गणितातील सर्व माहिती सुसंगतपणे मांडू या.

मराठीत अर्थ	चल वापरून गणितात रुपांतर
अब्दुलला कॅथरीनच्या तिप्पट अंतर जायचे आहे.	समजा कॅथरीनला जायचे अंतर = d तर अब्दुलने जायचे अंतर = $3d$
ते विनयने जायच्या अंतराच्या दुप्पट आहे. विनयने जायचे अंतर अब्दुलने जायच्या अंतराच्या निमपट आहे.	विनयने जायचे अंतर = $3/2 d$.
कॅथरीनचा वेग अब्दुलच्या वेगाच्या $1/3$ पट आहे.	कॅथरीनचा वेग समजा s . तर अब्दुलचा वेग $3s$.

विनयचा वेग कॅथरीनच्या वेगाच्या दुप्पट आहे.	विनयचा वेग = 2s.
सर्वजण एकाच वेळेला आपल्या गंतव्य स्थानाकडे जायला निघतात. अगोदर जायच्या ठिकाणी कोण पोचेल?	सर्वजण एकाच वेळेला आपल्या गंतव्य स्थानाकडे जायला निघतात.
आपला प्रवास पूर्ण करायला सगळ्यात कमी वेळ कोणाला लागतो? लागणारा वेळ हा अंतर आणि वेग यावरून काढू.	प्रवासाचा वेळ = अंतर/वेग.
अब्दुलला लागणारा वेळ = अंतर/वेग	अब्दुलने जायचे अंतर 3d, वेग = 3s लागणारा वेळ = d/s
विनयला लागणारा वेळ = विनयने जायचे अंतर/विनयचा वेग.	विनयने जायचे अंतर = 3/2 d, वेग = 2s लागणारा वेळ = [3/2d]/[2s] = (3/2)/2(d/s) = (3/4)(d/s)
कॅथरीनला लागणारा वेळ = कॅथरीनला जायचे अंतर/ तिचा वेग	कॅथरीनने जायचे अंतर = d, वेग = s, T=d/s

कॅथरीनला लागणारा वेळ d/s आणि अब्दुलला लागणारा वेळ सुद्धा d/s, म्हणजेच दोघेही एकाच वेळी पोचणार. मात्र विनयला लागणारा वेळ हा 3/4 (d/s) म्हणजेच अब्दुल, कॅथरीनला लागणाऱ्या वेळाच्या तीन चतुर्थांशच आहे. म्हणजेच विनय अगोदर पोचणार. हे गणित कसे सोडवले, ते सगळ्यांनाच पटकन आणि व्यवस्थित कळले. नेहा म्हणालीच, “सर ही सारणी बनवली आणि एकेका वाक्याची फोड करून मांडली, त्यामुळे गणित एकदम स्वच्छ कळले आणि उत्तर जणू सहजी उमलून आले.” ‘सहजी उमलून आले’, ही उपमा सर्वाना आवडली आणि त्याबद्दल, गणिताच्या तासाला साहित्य, म्हणून तिची मुलांनी थोडी चेष्टाही केली. गणित समजले, एक छान मांडणी कळली. सर तसंच मुलं खुश झाली.

केतनने विचारले, “तुम्ही शाळेत असताना कोणती वेगळी पद्धत शिकलात? तुमच्या लहानपणी तुमची शाळा कशी होती?”

केतनच्या दुसऱ्या प्रश्नाकडे सरांनी दुर्लक्ष केले. आज त्यांचा गप्पा मारायचा मूड नव्हता. त्या आठवणी खूप चांगल्या नव्हत्या. जरा वेळ थबकून त्या आठवणी त्यांनी बाजूला सारल्या आणि म्हणाले, “ती पद्धत थोडी अटकळ बांधायची होती. पण त्या पद्धतीनुसार काही गणिते सोडवल्यानंतर पुढल्या वर्षी आम्ही चल पदे आणि बैजिक राशी अगदी सहजी शिकलो. कारण या पद्धती म्हणजे बैजिक गणिताकडे नेणारी महत्त्वाची पायरी होती.”

“पहिल्यांदा जे काढायचे आहे त्यासाठी एक अंक धरायचा. अशा प्रकारे जो अंक आपण निवडू त्याला ‘इष्टांक’ म्हणतात. इष्ट म्हणजे आपल्यासाठी योग्य. आपल्याला गणित सोडवण्यासाठी उपयुक्त. हा इष्टांक ठरवणे, म्हणजे योग्य अटकळ बांधणे महत्त्वाचे. पण हे जरा हवेत होतेय. त्यामुळे मी अगोदर एक गणित इष्टांक धरून करून दाखवतो. मग एक एक पायरी समजावून सांगतो.”



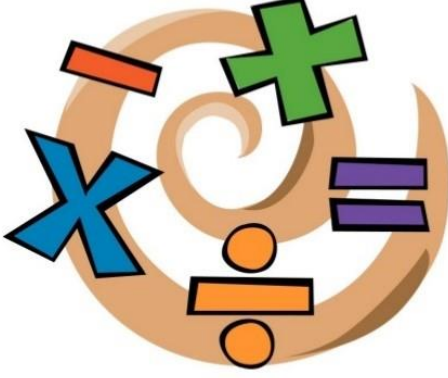
“गणितात 3 आणि 2 हे आकडे आले आहेत. आणि $1/3$ आणि $1/2$ हे वापरले आहेत. म्हणून इष्टांक 6 ठरवू.”

“आता मघाच्याप्रमाणे सारणीमध्ये गणितातील पायऱ्या आणि आकडेमोड देऊ.”

मराठीत अर्थ	चल वापरून गणितात रुपांतर
अब्दुलला कॅथरीनच्या तिप्पट अंतर जायचे आहे.	समजा कॅथरीनला जायचे अंतर = 6 तर अब्दुलने जायचे अंतर = 18
ते विनयने जायच्या अंतराच्या दुप्पट आहे. विनयने जायचे अंतर अब्दुलने जायच्या अंतराच्या निमपट आहे.	विनयने जायचे अंतर = 9.
कॅथरीनचा वेग अब्दुलच्या वेगाच्या 1/3 पट आहे.	कॅथरीनचा वेग 6 धरू. तर अब्दुलचा वेग 18.
विनयचा वेग कॅथरीनच्या वेगाच्या दुप्पट आहे.	विनयचा वेग = 12
सर्वजण एकाच वेळेला आपल्या गंतव्य स्थानाकडे जायला निघतात. अगोदर जायच्या ठिकाणी कोण पोचेल?	सर्वजण एकाच वेळेला आपल्या गंतव्य स्थानाकडे जायला निघतात.
आपला प्रवास पूर्ण करायला सगळ्यात कमी वेळ कोणाला लागतो? लागणारा वेळ हा अंतर आणि वेग यावरून काढू.	प्रवासाचा वेळ = अंतर/वेग.
अब्दुलला लागणारा वेळ = अंतर/वेग	अब्दुलने जायचे अंतर 18, वेग = 18 लागणारा वेळ = $18 / 18 = 1$
विनयला लागणारा वेळ = विनयने जायचे अंतर/विनयचा वेग.	विनयने जायचे अंतर = 9, वेग = 12 वेळ = $9/12 = 3/4$
कॅथरीनला लागणारा वेळ = कॅथरीनला जायचे अंतर/ तिचा वेग	कॅथरीनने जायचे अंतर=6, वेग =6, वेळ $T=6 / 6 =1$

“मग विनयला लागणारा वेळ हा अब्दुल आणि कॅथरीनला लागणाऱ्या 1 या वेळापेक्षा कमी आहे, 3/4 आहे. इथे आपल्याला सारखे t आणि s ला वागवावे लागले नाही. परत आकडेमोड खूप सोपी झाली. छान आहे ना ही पद्धत.”

मुलांना ही पद्धत सोपी आहे हे जाणवले होते. पण त्यांच्या मनात अनेक प्रश्न होते. इथे तुलना करायची आहे. नेमके उत्तर या पद्धतीने काढता येईल का? ते कसे? हा मुख्य प्रश्न मनात होता. या प्रकारची उदाहरणे कोडी या स्वरूपामध्ये आपण अनेकदा बघितली आहेत.



सोडवली आहेत. यामध्ये एका अंकावर अनेक क्रिया करायच्या असतात आणि मग त्या क्रिया करून झाल्यानंतर, म्हणजे या इष्ट कर्म पद्धतीच्या भाषेत दृश्य सांगितलेले असते, त्यानंतर आपण एक सोयीचा अंक इष्टांक म्हणून घेतो. हा इष्टांक, जी

संख्या आपल्याला काढायची आहे तिच्यासाठी आपण धरला आहे. जी संख्या काढायची, तिच्यावर वेगवेगळ्या ज्या क्रिया केलेल्या असतात, त्या त्या त्याच क्रमाक्रमाने या इष्टांकावर करावयाच्या. हे सर्व झाल्यावर आपल्याला जे काही उत्तर मिळेल, ते उत्तर म्हणजे फळ. खरं म्हणजे, जर का आपल्याला इष्टांक म्हणजेच आपल्याला हवी असलेली संख्या असेल तर आता मिळालेले फळ म्हणजेच दृश्य असायला हवं. बहुतेक वेळेला ते तसे नसते, मग या इष्टांकासाठी हे फळ, तर दृश्यासाठी कुठला अंक, अशा पद्धतीने आपण आपल्या मनातला अंक काढतो. संपूर्ण वेळ आपण एका सोयीच्या अंकावर क्रिया करत असतो. त्यामुळे कमीतकमी गोंधळ होऊन फळ काढता येते.

यावरून आपल्याला असं दिसतं, की सुरुवातीचा किंवा हवा असलेला अंक बरोबर इष्टांक गुणिले दृश्य, भागिले फळ. ज्या पद्धतीने शिक्षकांनी गणित सोडवले, ती निश्चितच अनोखी होती. मुलांना त्याच्यात वेगळीच गंमत वाटली. त्यांनी अजून एक उदाहरण द्या, असे

सांगितले. शिक्षकांनी त्यांना असे सांगितले, “भास्कराचार्य द्वितीय यांचे जे एक महान अप्रतिम पुस्तक आहे ‘लीलावती’, त्यातल्या 17 व्या धड्यातील पन्नासावा प्रश्न मी तुम्हाला सांगतो. जर एका अंकाला पाचने गुणले आणि त्या उत्तरातून त्याचे एक तृतीयांश वजा केले आणि त्या वजाबाकीला 10 ने भागले, तर जी संख्या येईल; तिच्यात मूळ संख्येचा अर्धा भाग, एक तृतीयांश भाग आणि एक चतुर्थांश भाग मिळवला, तर ही बेरीज 68 येते. तर मग तो अंक कुठला? इथे शेवटी आपल्याला दिलेला अंक आहे 68. म्हणजे इष्टांक तीन, दृश्य 68 आणि फळ सतरा भागिले चार, म्हणून आपल्याला अपेक्षित संख्या बरोबर इष्टांक गुणिले दृश्य, भागिले फळ, म्हणजेच $3 * 68$ भागिले 17, भागिले चार.

आपण इष्टांक पद्धतीने सोडवू. 3 किंवा 6 हे इष्टांक घेऊ शकतो. खरे तर आपण कोणताही अंक इष्टांक म्हणून ठरवू शकतो, पण 3 ने भागले आहे म्हणून 3 किंवा 6 असा इष्टांक सोयीस्कर. इष्टांक 3 वर गणितात सांगितलेल्या क्रमाने दिलेल्या क्रिया करू या.

3 ला 5 ने गुणून आले 15.

15 तून त्याचा $1/3$ वजा करायचा. $15 - 1/3 \times 15 = 10$.

या उत्तराला 10 ने भागून आले $10/10$ म्हणजे 1.

त्यात मूळ अंकाच्या $1/2$, $1/3$ आणि $1/4$ मिळवा.

$$1 + 3/2 + 3/3 + 3/4 = (12 + 18 + 12 + 9)/12 = 51/12 = 17/4$$

हे आले फळ. मग खरे उत्तर = इष्टांक x दृश्य / फळ

$$\text{इष्टांक} = 3, \text{दृश्य} = 68 \text{ फळ} = 17/4.$$

$$\text{खरे उत्तर} = 3 \times 68 / (17/4) = 3 \times 68 \times (4/17) = 48.$$

आपल्याला हवे असलेले उत्तर म्हणजे मूळ अंक = ४८.

तुला करून पाहू.

$$48 \times 5 = 240,$$

$$240 - 1/3 \times 240 = 160.$$

$$160/10 = 16.$$

$$16 + 48/2 + 48/3 + 48/4 = 16 + 24 + 16 + 12 = 68!$$

तेव्हा उत्तर योग्य आहे.

ही पद्धत परिणामकारक आहे कारण आपण जास्तीतजास्त वेळ पूर्णांकच वापरले. बरे, योग्य इष्टांक घेतल्यामुळे गणितात क्रियानुसार भागाकार केले, तरी उत्तरे पूर्णांकच आली. पूर्णांक संख्यांचे अवयव पाडता येतात, त्यामुळे पूर्ण भाग घालवता येतो. त्यामुळे आकडेमोड अगदी सोपी होते. इष्टांक ठरवायची एक युक्ती म्हणजे गणितात ज्या संख्यांनी भागले आहे, त्या संख्यांचा, ल. सा. वि. इष्टांक घेणे. या गणितात 1/3, 1/4 आणि 1/2 आहेत. 2, 3 आणि 4 यांचा ल.सा.वि. 12 आहे. इष्टांक 12 घेऊ या. आणि इष्टकर्म पद्धतीने गणित परत सोडवू.

$$12 \times 5 = 60,$$

$$60 - 1/3 \times 60 = 40; 40/10 = 4.$$

4 मध्ये मूळ संख्येच्या, आत्ता इष्टांकाच्या, 1/2, 1/3 आणि 1/4 यांची बेरीज मिळवा.

$$4 + 12/2 + 12/3 + 12/4 = 4 + 6 + 4 + 3 = 17.$$

इच्छित संख्या = इष्टांक x दृश्य / फळ = 12 x 68 / 17 = 12 x 4 = 48. खल्लास! किती सुटसुटीत आकडेमोड.

(ज्यांना चल वापरून गणिते सोडवायची पद्धत माहीत आहे, त्यांनी त्या पद्धतीने हे गणित सोडवून पहावे. मग इष्ट कर्म पद्धत किती सोपी आहे, ते कळेल.)

ही पद्धत भास्कराचार्यांच्या लीलावती आणि बीजगणित पुस्तकात 'इष्ट कर्म' पद्धत म्हणून शिकवली आहे. ही पद्धत अनेक गणितांत वापरता येते. ज्या गणितात अनेक गणिती क्रियांनंतरचे उत्तर सांगितले असेल आणि मूळ संख्या विचारली असेल, अशा गणितात इष्ट कर्म अत्यंत परिणामकारक पद्धत आहे. मात्र प्रत्येक गणितासाठी इष्ट कर्म पद्धत वापरता येत नाही. अशा वेळी, इष्टांक ऐवजी चल पद, म्हणजे 'क्ष' सारखे अक्षर वापरून गणित सोडवता येते. इष्टांकावर आपण क्रिया करतो, इष्टांकाची किंमत आपण कोणतीही घेऊ शकतो. हे गुणधर्म आपण क्ष या अक्षराला देऊ. क्ष ची किंमत कोणतीही असू शकते. क्ष वर विविध क्रिया करायच्या आणि आलेले उत्तरात गणितात दिलेली क्ष ची किंमत घालायची, अशी पद्धत वापरतो. म्हणजेच 'इष्टांक' आणि 'इष्ट कर्म' यांची पुरेशी ओळख असेल, तर अक्षर घेणे म्हणजे चल पद वापरणे ही कल्पना सहजी समजेल आणि बीजगणित पहिल्यापासूनच सोपे वाटू लागेल.

§§§

लेखक: **किरण बर्वे**, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान येथे गणित शिकवतात. विज्ञान व गणित विषयांत लेखन करतात. शैक्षणिक संदर्भ गटात सहभागी.

इ-मेल : barvekh@gmail.com

(कळीचे शब्द:- चल पद, इष्टांक, इष्ट कर्म, भास्कराचार्य, लीलावती)

शैक्षणिक संदर्भ द्वैमासिकाविषयी

शैक्षणिक संदर्भ हे पालकनीती परिवाराचे द्वैमासिक ऑगस्ट १९९९ पासून संदर्भ सोसायटी प्रकाशित करत आहे. २०१८ सालापासून 'शैक्षणिक संदर्भ' हा इ-अंक इ-मेल आणि व्हॉट्सॅपच्या माध्यमातून आपल्यापर्यंत आम्ही नियमित पोहोचवत आहोत.

आपल्याला आमचे अंक वाचायचे असल्यास आपला इ-मेल पत्ता आणि व्हॉट्सॅप क्रमांक (ऐच्छिक) आम्हाला sandarbh.marathi@gmail.com वर पाठवावा. दर आठवड्याला एक लेख व दर दोन महिने पूर्ण झाल्यावर आठ लेखांचा एकत्रित एक अंक असे आपल्याला पीडीएफ स्वरूपात मिळतील. आपला व्हॉट्सॅप क्रमांक कळवल्यास आपल्याला Sandarbh Readers या आमच्या वाचक गटामध्ये सामील केले जाईल. तेथेही आपण लेख व अंक वाचू शकाल.

www.sandarbhociety.org या वेबसाईटला जरूर भेट द्या. जुने अंक त्यावर पीडीएफ स्वरूपात उपलब्ध आहेत. वाचू शकता, डाऊनलोड करू शकता.

या उपक्रमासाठी आपली ऐच्छिक देणगी संदर्भ सोसायटीकडे खालील अकाउंटमध्ये जमा करू शकता, केल्यानंतर वरील इ-पत्त्यावर तशी मेल करा.. अधिक माहिती वेबसाईटवर उपलब्ध आहे.

इ-पेमेंट : Sandarbh Society

Account No.: 20047006634

Bank of Maharashtra, Mayur Colony, Pune

IFS Code: MAHB0000852

- संपादक मंडळ, शैक्षणिक संदर्भ व विश्वस्त मंडळ, संदर्भ सोसायटी