

शैक्षणिक संदर्भ अंक १४२ (जून - जुलै २०२३)

गणिती रूपकांची न्यायी दुनिया

भाग २

लेखक : किरण बर्वे

गणिती रूपकांची न्यारी दुनिया

भाग २

लेखक : किरण बर्वे

पहिल्या भागात आपण गणित म्हणजे तर्कबुद्धी वापरून पाहुण्यांसाठी चहा करायचा प्रश्न सोडवला. अगदी समीकरणच मांडले नसले, तरी मोजमाप, घटकांतील परस्परसंबंध,



उत्तराशी नाते, हे गणितीकरणातील सर्व पैलू या उदाहरणात आले. आता एक महत्त्वाचे आणि अनेक वेगवेगळ्या संदर्भात लागू पडेल असे व्यवहारातील उदाहरण बघू या.

एका मोठ्या कुरणामध्ये मोठ्या संख्येने ससे आहेत. तसेच त्याच कुरणामध्ये ससे मारून खाणारी तरसे आहेत. आता तिथे सशांच्या संख्येत वाढ किती होईल? तरसेही जास्त संख्येने उत्पन्न होतील का? असे प्रश्न आहेत. हा प्रश्न समजून घ्यायला लागेल. जर तरसे नसतील तर सशांची संख्या वाढतच राहिल कारण सशांची एक जोडी तिच्या आयुष्यात ६

पिल्ले जन्माला घालते. म्हणजे या जोडीच्या मृत्यूनंतर त्यांनी जन्म दिलेले नवीन ६ ससे वजा मृत्यू पावलेली जोडी संख्या २ म्हणजेच ससे ४ ने वाढतील. या पद्धतीत गंमत होईल आणि सशांची संख्या अफाट वाढत राहिल.

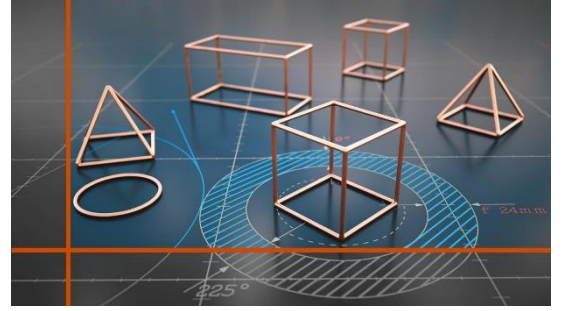
समजा, सशांच्या ५० जोड्या आहेत. त्यांचे आयुष्य १ वर्षाचे आहे. तर वर्षभरानंतर प्रत्येक जोडीमुळे ४ ससे वाढतील. आता सशांच्या १०० जोड्या तयार होतील. दुसऱ्या वर्षाखेर २०० जोड्या, तिसऱ्या वर्षाच्या शेवटी ४०० जोड्या असतील. या अगदी बाळबोध गणितातून एक गोष्ट स्पष्ट झाली, की सशांच्या संख्येतील वाढ त्यांच्या मुळातील संख्येवर अवलंबून आहे. मूळ सशांची संख्या जितकी अधिक तितकी त्यांच्या संख्येतील वाढ अधिक. आणि सशांच्या संख्येतील वाढ सशांच्या संख्येच्या सम प्रमाणात आहे. मात्र ही वाढ वर्गाच्या प्रमाणात आहे. [सम प्रमाण हा शब्द अगदी ढोबळ मानाने वापरला आहे. 'अ' मध्ये वाढ झाली तर 'ब' मध्ये वाढ होते यासाठी.]

'न' वर्षानंतर सशांची संख्या = $2 \times (n-1)$ वर्षानंतरची सशांची संख्या. म्हणजेच,
न वर्षानंतर सशांची संख्या = $2^n \times$ सशांची सुरुवातीची संख्या.

एक महत्त्वाचा घटक 'सशांच्या संख्येतील वाढ' याचे गणितीकरण करायची सुरुवात झाली आहे. इथे आपण तरसांचा विचारच केला नाही. मात्र तरस आहेत. ससे वाढत आहेत म्हणजे तरसांना खावयास अन्न विपुल आहे. अर्थातच तरसांची संख्या वाढत जाणार. ते जास्त संख्येने ससे मारून खाणार. मात्र जसजशी सशांची संख्या कमी होईल, अर्थात तरसांसाठीचे अन्न कमी उपलब्ध असेल. म्हणजेच तरसांची वाढ कमी होईल. काही काळानंतर तरस आणि ससे यांची संख्या स्थिर होईल, तीत फारसा बदल होणार नाही. मात्र

कल्पना आणि परस्परसंबंध योग्य असले तरी प्रश्न इतका सुलभ नाही. थोडे अधिक नेमकेपणाने गणितीकरण करूया.

वर्षाच्या सुरुवातीला x ससे आणि y तरसे आहेत. एक वर्षासाठी आपले गणित मांडू. ही गणितीकरणाची प्रक्रिया आपण करत आहोत. आपण वर काढलेली सशांच्या संख्येतील वाढ आपण त्याच कुरणात तरस आहेत याकडे दुर्लक्ष करून काढलेली आहे. अशी वाढ 'b' अक्षरानी दाखवू. तरस ससे मारतात आणि खातात. अर्थातच जितकी तरसे अधिक तितकी मृत्यू पावणाऱ्या सशांची संख्या अधिक. मृत्यू पावणाऱ्या सशांची संख्या तरसांच्या संख्येच्या



सम प्रमाणात असणार. तरसांची संख्या आहे y आणि तरसांनी खाल्ले म्हणून सशांची संख्यात्मक वाढ कमी होणार.

तरस आणि ससे त्या कुरणात आहेत आणि त्यांच्यात भक्षक-भक्ष्य अशी क्रिया चालू आहे त्यामुळे सशांची वाढ कमी होणार, अशा वेळी होणारी सशांच्या संख्येतील वाढ आपण 'f' अक्षराने दाखवू. तर,

$$f = b - py$$

तरसांची संख्या y आणि त्यानी मारलेल्या सशांची संख्या y च्या सम प्रमाणात म्हणून $p y$. आपले समीकरण या रीतीने आले. 'p' हा सहगुणक आहे.

पण तरसांची संख्या काही स्थिर नसणार कारण त्यांचे खाद्य, ससे पुरेशा प्रमाणात असतील तर तरसांची संख्या वाढेल. आणि तरसांच्या संख्येतील वाढ सशांच्या संख्येच्या

xच्या सम प्रमाणात असणार. तरसांच्या संख्येची वाढ 'rx' असेल. अर्थातच तरस (आपणही) अमर नाही. त्यामुळे तरस मृत्यू पावणार. समजा वर्षभरात 'd' तरस मृत्यू पावतील. तरसांच्या संख्येतील वाढ 'g' खालील समीकरणाने दाखवता येईल.

$$\text{समीकरण } g = rx - d$$

या संपूर्ण व्यवहाराचे गणितीकरण झाले. मात्र प्रत्यक्ष उत्तर काढायला सुरुवात करण्यासाठी आपल्याला वर्षांच्या सुरुवातीची x, y यांची किंमत आवश्यक आहे, तसेच p आणि r हे सहगुणक माहीत हवेत. म्हणून निरीक्षणे उपलब्ध असायला हवीत, किंवा आपण सर्व्हे करायला हवा.

$$f = b - py$$

$$g = rx - d$$

ही एक सामायिक समीकरणे आणि p , r च्या किमती म्हणजे गणितीकरण. या पद्धतीने आपण दर वर्षीचे ससे आणि तरसांच्या संख्येच्या किंमती काढू शकू.

मात्र अर्थातच या गणितीकरणासाठी आपण काही गृहीतके मान्य केलेली आहेत. पहिले म्हणजे गवत आणि सशांचा संबंध विचारात घेतला नाही. दुसरे गृहीतक अशा पद्धतीचे गणित दर वर्षी एकदा करून योग्य उत्तर मिळेल.

दुसरे गृहीतक अधिक समजून घेऊ या. तरसांनी ससे खाणे, सशांचे पुनरुत्पादन आणि तरसांचे मृत्यू सतत होतच असतात. सशांचे मृत्यू आपण सशांच्यातील वाढ काढायचे ठरवल्यामुळे स्वतंत्र लक्षात घेतले नाहीत तरी चालेल. पण सशांची संख्या एकदम वर्षभराने वाढणार नाही. म्हणजेच सतत चालणारी प्रक्रिया आपण तुकड्या तुकड्याने राबवणार

आहोत. मग जर का सतत होणारे बदल लक्षात घ्यायचे असतील तर आपल्याला कलनशास्त्र वापरायला लागेल.

$$Dx=(b-py)x$$

$$Dy=(rx-d)y$$

ही समीकरणे आली. Dx म्हणजे x मधील वाढ. मात्र ती x, y दोन्हीवर अवलंबून आहे.

आपण आता परत गणिती रूपकाच्या अभ्यासाच्या दृष्टीने या गणितीकरणाकडे बघूया. पहिल्या भागात खूप गृहीतके धरून एक सोपे मात्र सर्व क्रिया प्रक्रिया विचारात घेऊन गणिती रूपक केले. मग त्यातील गृहीतके कोणती ते परत समजावून घेतले, जी शक्य आहेत ती कमी केली आणि नवीन समीकरण तयार केले. या पुढची पायरी म्हणजे गणितातील पद्धत वापरून ही समीकरणे सोडवणे. पहिल्या रूपकामध्ये एक सामायिक समीकरणे सोडवण्याची रीत वापरता येईल. तर दुसरे अधिक सुधारित रूपक सोडवताना partial differential equations सोडवून उत्तरे काढली जातात. प्रत्यक्ष निरीक्षणे आणि गणिती रूपक सोडवून आलेली उत्तरे यांची तुलना केली जाते.

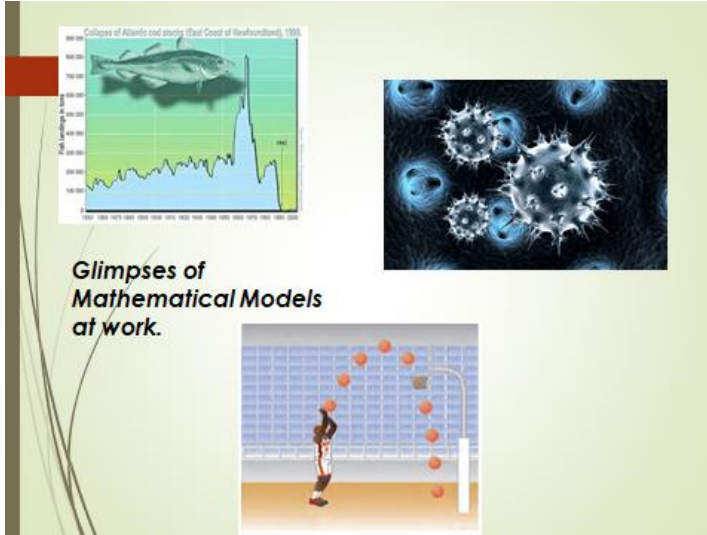
सहसा प्रत्यक्षातील निरीक्षणे आणि गणिती रूपकाद्वारे आलेली उत्तरे तंतोतंत जुळत नाहीत. मात्र अशा वेळी किती फरक मान्य करायचा ते अगोदर ठरवलेले असते. त्याप्रमाणे रूपकाचे उत्तर आले की मग ते व्यवहारात वापरले जाते.

समजा आलेले उत्तर आणि प्रत्यक्ष निरीक्षणाने आलेले उत्तर यात जास्त फरक असेल तर गृहीतके आणि उत्तर काढायला वापरलेली गणितातील रीत यात सुधारणा केली जाते आणि परत गणिती रूपक तयार केले जाते.

वरील लोकसंख्येचे रूपक, दोन घटकांतील स्पर्धेच्या अभ्यासासाठी वापरले जाते. अर्थशास्त्र, समाजशास्त्र, दोन समान उत्पादने असणाऱ्या कंपन्यांतील स्पर्धा अशा अनेक परिस्थितीत ते वापरता येते.

म्हणूनच मी Mathematical Modelling साठी 'गणिती रूपक' हा शब्द वापरतो. प्रतिमान किंवा प्रारूप या शब्दांपेक्षा 'रूपक' मध्ये अधिक लवचिकता आहे. घटकांच्या महत्त्वातील बदलही सर्व रूपक शब्दात सामावले आहे असे माझे मत आहे. असो.

व्यवहारात अनेक प्रक्रिया घडत असतात. काही मुद्दाम घडवल्या जातात. उदा. हवा



गरम गार होणे, वारा सुटणे या प्रक्रिया घडत असतात. माणूसही मोठ्या प्रमाणावर घडवत नाही, घडवू शकत नाही. तर विविध उत्पादनं तयार करत असताना अनेक घटक एकत्र आणून, विशिष्ट

प्रक्रिया करून उत्पादन काढले जाते. उदा सायकलचे, चपलेचे, सिमेंटचे, औषधांचे उत्पादन. गणिती रूपक या आणि यासारख्या असंख्य प्रक्रियांचा अभ्यास करण्यासाठी वापरले जाते. कारण घटक समजून घेणे, मोजमाप करून परिस्थितीचे गणितीकरण करणे, घटकांतील परस्पर क्रिया-प्रतिक्रिया गणितात बसवणे, त्यासाठी योग्य ती गृहीतके स्वीकारणे, गणितातील रितीनुसार गणिताच्या भाषेत उत्तर काढणे आणि मग व्यवहारातील उत्तरे काढणे,

ही सर्व पद्धत वापरूच शकतो आणि वापरली जाते. आता काही उपयोग चित्रांद्वारे दाखवत



आहे. मात्र त्याचे विवरण करणार नाही. तुम्ही अधिक माहिती घ्याल असा विश्वास

आहे. गणिती रूपक असे हरहुन्नरी, जास्तीत जास्त परिस्थितींचा अभ्यास करायला उपयोगी आहे. म्हणूनच गणिती रूपकांच्या ह्या न्याऱ्या दुनियेची तोंड ओळख तुम्हाला नक्कीच आवडली असेल.

चित्रे आणि अधिक माहितीसाठी संदर्भ :

1. <https://slideplayer.com/slide/12326543/>
2. https://www.academia.edu/42312706/Introduction_to_mathematical_modeling?auto=download

§§

लेखक : किरण बर्वे, भास्कराचार्य प्रतिष्ठान येथे गणित शिकवतात. विज्ञान व गणित विषयांत लेखन करतात. शैक्षणिक संदर्भ गटात सहभागी.

इ-मेल : barvekh@gmail.com

(कळीचे शब्द : गणिती रूपक, गणिती रूपक रूपरेषा, व्यवहारात गणिती रूपकांचा उपयोग)

शैक्षणिक संदर्भ द्वैमासिकाविषयी

शैक्षणिक संदर्भ हे पालकनीती परिवाराचे द्वैमासिक ऑगस्ट १९९९ पासून संदर्भ सोसायटी प्रकाशित करत आहे. मराठीतून चांगले विज्ञान वाचायला मिळावे, शालेय व महाविद्यालयीन विद्यार्थ्यांच्या कुतूहलाला प्रोत्साहन मिळावे, अनुभवांना जोडून असलेल्या विज्ञानाची सहज ओळख व्हावी आणि समाजात वैज्ञानिक दृष्टिकोन वाढावा, हे याचे उद्देश आहेत.

२०१८ सालापासून आम्ही शैक्षणिक संदर्भची छापील आवृत्ती न काढता इ-अंक प्रकाशित करत आहोत व इमेल आणि व्हॉट्सॅपच्या माध्यमातून वाचकांपर्यंत पोहोचवत आहोत.

आपल्याला आमचे अंक वाचायचे असल्यास आपला इ-मेल पत्ता आणि व्हॉट्सॅप क्रमांक (ऐच्छिक) आम्हाला sandarbh.marathi@gmail.com वर पाठवावा. दर आठवड्याला एक लेख व दर दोन महिने पूर्ण झाल्यावर आठ लेखांचा एकत्रित एक अंक असे आपल्याला पीडीएफ स्वरूपात मिळतील.

www.sandarbhsociety.org या वेबसाईटला जरूर भेट द्या. जुने अंकही त्यावर पीडीएफ स्वरूपात उपलब्ध आहेत.

हा उपक्रम विनामूल्य आहे, पण आपण आपला सहभाग ऐच्छिक देणगी रूपात संदर्भ सोसायटीकडे पाठवू शकता. अधिक माहिती वेबसाइटवर उपलब्ध आहे.

- संपादक मंडळ, शैक्षणिक संदर्भ व विश्वस्त मंडळ, संदर्भ सोसायटी